Christina Bender Universität des Saarlandes SS 2010 23.4.2010
Peter Parczewski

Risikomanagement

Übungsblatt 1

Aufgabe 1 Verlust und linearisierter Verlust 1. Ordnung
Es sei angenommen, eine Bank bewerte zum Zeitpunkt t ihre Optionen auf die Aktie S mit Wert $S_t = s$ und Volatilität $\sigma \in \mathbb{R}^+$ mit Hilfe der Black-Scholes-Formel. D.h. mit einer über die Laufzeit konstanten Zinsrate $r > 0$ nach stetiger Verzinsung können eine Call-Option mit Strike $K_C > 0$ und Fälligkeit $T > t$ sowie eine Put-Option mit Strike $K_P > 0$ zur selben Fälligkeit $T > t$ nach folgenden analytischen Formeln berechnet werden:

$$\begin{aligned} Call_{BS}(t, T, K_C, s, r, \sigma) &= s\Phi(d_+) - K_C e^{-r(T-t)}\Phi(d_-), \\ Put_{BS}(t, T, K_P, s, r, \sigma) &= K_P e^{-r(T-t)}\Phi(-d_-) - s\Phi(-d_+), \end{aligned}$$

wo Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung und $d_\pm = \frac{\ln(s/K_{C(P)}) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ist. In der Realität ist der Zinssatz r_t und die Volatilität σ_t nicht konstant mit fortschreitender Zeit. Zur Bewertung verwendet die Bank weiterhin die Black-Scholes-Formel mit σ_t und r_t anstelle von σ und r. Als Risikofaktoren $\mathbf{Z}_t$ definiert die Bank daher $\mathbf{Z}_t = (\ln(S_t), r_t, \sigma_t)$.

(1) Bestimmen Sie den Verlust L_τ des Portfolios bestehend aus einer Call- und einer Put-Option mit den Strikes $K_C = 1$ und $K_P = 3$ auf den Zeithorizont $t = 0$ bis $t = \tau = 2$.
(2) Bestimmen Sie nun den linearisierten Verlust 1. Ordnung des obigen Portfolios (Delta-Methode) und diskutieren Sie die Vorgehensweise anhand der Taylorformel. Benutzen Sie die Taylorformel, um den Verlust 2. Ordnung darzustellen (Delta-Gamma-Methode).

Aufgabe 2 Nutzenfunktionen
In der ersten Vorlesung haben wir gesehen, dass man für ein Los des Gewinnspiels $P(X = 100) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$ vielleicht $SA = 40$ (Sicherheitsäquivalent) zu investieren bereit ist, für ein Los des Gewinnspiels $P(X = 10000) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$ jedoch keinesfalls den proportionalen Betrag von 4000. Wir nehmen daher an, dass die Auszahlungen der Investition mit einer Nutzenfunktion gewichtet werden, z.B. mit $u(x) = 1 - \exp(-\alpha x)$. Für SA muss also gelten: $\mathbf{E}[u(X)] = u(SA)$. Bestimmen Sie α anhand des ersten Gewinnspiels und berechnen Sie mit diesem α das Sicherheitsäquivalent SA in dem Gewinnspiel $P(X = 10000) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$. Betrachten Sie ebenso die Nutzenfunktion $u(x) = \frac{1}{\beta}x^\beta$ und bestimmen Sie β.

Aufgabe 3 t-Verteilung

(1) Sei $L = \mu + \tilde{\sigma}Y$, wo $Y \sim t_n$-verteilt, $\mu \in \mathbb{R}$, $\tilde{\sigma} > 0$. Bestimmen Sie den Erwartungswert, die Varianz, den Value at Risk VaR_α und den Expected Shortfall ES_α des Verlustes L. Hinweis: $ES_\alpha = \frac{f_{t_n}(t_n^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}\left(\frac{n+(t_n^{-1}(\alpha))^2}{n-1}\right)$, wobei f_{t_n} die Dichte und t_n^{-1} das Quantil der t_n-Verteilung ist. Man substituiere zuerst mit $x = t_n^{-1}(u)$ und dann mit $y = (1 + \frac{x^2}{n})$.

(2) Sei nun ein Portfolio aus a Stücken einer Aktie S im Wert von $V_0 = aS_0 = 10000$ mit dem linearisierten Verlust $L_\tau = -V_0 X_\tau$ gegeben. Hierbei ist X_τ, der tägliche log-return der Aktie, entweder $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-verteilt mit $\sigma = \frac{0.2}{\sqrt{250}}$ oder X_τ ist ein Vielfaches einer t_4-verteilten Zufallsvariable und hat ebenfalls σ als Standardabweichung. Berechnen und vergleichen Sie den Value at Risk und den Expected Shortfall für diesen linearen Verlust zu den Konfidenzniveaus $\alpha = 90\%, 95\%, 97.5\%, 99\%$ und 99.5%.