

# Risikomanagement

## Übungsblatt 3

**Aufgabe 1** In der Datei *daten.xls* finden Sie zwei Zeitreihen zweier Aktien  $(\log(S_{1,t}))_t$  und  $(\log(S_{2,t}))_t$  über 250 Handelstage. Es sei angenommen, der Investor besitze 30 Aktien von  $S_1$  und 80 Aktien von  $S_2$ . Bestimmen Sie die log-Preise als Risikofaktoren und die log-returns  $X_{i,t} = \log(S_{i,t}) - \log(S_{i,t-1})$ . Führen Sie mit den log-returns eine historische Simulation durch und berechnen Sie den Value at Risk zum Konfidenzniveau 99%.

**Aufgabe 2** Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  eine integrierbare Zufallsvariable. Sei  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  eine Unter- $\sigma$ -Algebra. Dann heißt die Zufallsvariable  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$  bedingter Erwartungswert von  $X$  bezüglich  $\mathcal{G}$ , falls es  $\mathcal{G}$ -messbar ist und für alle  $B \in \mathcal{G}$ ,

$$\mathbf{E}[X1_B] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]1_B]$$

erfüllt ist.

- (1) Zeigen Sie, dass für  $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  die Zufallsvariable  $X - \mathbf{E}[X|\mathcal{G}]$  orthogonal ist zum Unterraum  $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ .
- (2) Zeigen Sie: Für eine weitere Unter- $\sigma$ -Algebra  $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  gilt  $\mathbf{E}[\mathbf{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathbf{E}[X|\mathcal{H}]$ .
- (3) Sei nun  $(D_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$  eine Familie von disjunkten Mengen, die  $\Omega$  überdecken und  $\mathcal{G} := \{ \bigcup_{i \in M} D_i, M \subset \mathbb{N} \}$ . Dann gilt  $\mathbf{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{i \in \mathbb{N}} d_i 1_{D_i}$ , wobei  $d_i = 0$  falls  $\mathbb{P}(D_i) = 0$  und sonst  $d_i = \mathbf{E}^{\mathbb{P}(\cdot|D_i)}[X]$  definiert ist.

### Aufgabe 3

- (1) Bestimmen Sie zu den beiden Portfolios A und B in Aufgabe 2, Blatt 2 die Expected Shortfall contributions  $AC_i^{LA}$  und  $AC_i^{LB}$ ,  $i = 1, \dots, 100$ .
- (2) Seien drei Bonds der Automobilindustrie  $X_i^t : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  und  $t = t_1, t_2$  mit  $0 < t_1 < t_2$  gegeben. Für den ersten Zeitraum bis  $t_1$  haben alle drei Bonds die Ausfallwahrscheinlichkeit  $p = 0.05$ . Es gilt also  $\mathbb{P}(X_i^{t_1} = 1) = p$ . Für den darauffolgenden Zeitraum von  $t_1$  bis  $t_2$  ist die Ausfallwahrscheinlichkeit für jeden Bond abhängig von der Anzahl der Ausfälle im ersten Intervall. Es ist nun  $p(0 \text{ Ausfälle}) = p$ ,  $p(1 \text{ Ausfall}) = 0.8p$ ,  $p(2 \text{ Ausfälle}) = 0.6p$ . Es ist also  $X_i^{t_2} = 1$ , wenn  $X_i^{t_1} = 1$  und ansonsten

$$\mathbb{P}(X_i^{t_2} = 1) = p \left( \sum_{i=1}^3 X_i^{t_1} \right)$$

Bestimmen Sie für das Portfolio  $S_2 = \sum_{i=1}^3 X_i^{t_2}$  den bedingten Erwartungswert

$$\mathbf{E}[S_2|(X_1^{t_1}, X_2^{t_1}, X_3^{t_1})]$$

- (3) Wir betrachten nun zwei Automobilfirmen A und B und eine Zuliefererfirma für B. Die drei Bonds dieser Firmen verhalten sich bis zum Zeitpunkt  $t_1$  wie in der vorigen Situation. Die Verteilungen der Bonds zum Zeitpunkt  $t_2$  sind nun:  $X_i^{t_2} = 1$ , wenn  $X_i^{t_1} = 1$  und ansonsten

$$\mathbb{P}(X_1^{t_2} = 1) = p \left( \sum_{i=1}^2 X_i^{t_1} \right)$$

$$\mathbb{P}(X_2^{t_2} = 1) = p \left( \sum_{i=1}^2 X_i^{t_1} \right) - 0.01pX_3^{t_1}$$

Wenn  $X_1^{t_1} = 0$  und  $X_2^{t_1} = 0$  gilt, dann ist  $\mathbb{P}(X_3^{t_2} = 1) = p$  ansonsten ist  $X_3^{t_2} = 1$ .

Bestimmen Sie für das Portfolio  $S_2 = \sum_{i=1}^3 X_i^{t_2}$  den bedingten Erwartungswert

$$\mathbf{E}[S_2 | (X_1^{t_1}, X_2^{t_1}, X_3^{t_1})].$$

**Die Übungen können bis Donnerstag vor der nächsten Übung am 28.5.10 zur Korrektur in E2 4, Zimmer 208 abgegeben werden.**