

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 2

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Martingal mit $M_0 = 0$, $\mathbb{E}[M_n^2] < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $X_n := M_n^2$. Zeigen Sie:

- (1) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist ein Submartingal.
- (2) Für die Doob-Zerlegung $X_n = M'_n + A_n$ gilt $\mathbb{E}[A_n] = \mathbb{E}[M_n^2]$.
- (3) $A_n - A_{n-1} = \mathbb{E}[(M_n - M_{n-1})^2 | \mathcal{F}_{n-1}]$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Sei $X_n = \sum_{i=0}^n (2\xi_i - 1)$, $((\xi_i)_{i \in \mathbb{N}})$ i.i.d p -Bernoulli-verteilt, die Irrfahrt aus Beispiel 2.2. Zeigen Sie:

Für jedes $r > 0$ gibt es ein $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass der Prozess

$$(\exp(\gamma X_n - rn))_{n \in \mathbb{N}}$$

ein Martingal bezüglich der Filtrierung $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ wird.

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Seien σ und τ Stoppzeiten auf dem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in T}, P)$. Zeigen Sie, dass die folgenden Zufallsvariablen Stoppzeiten sind:

- (1) t , für ein festes $t \in \mathbb{N}$.
- (2) $\min(\sigma, \tau)$, $\max(\sigma, \tau)$.
- (3) $\sigma + \tau$. Wieso ist $\sigma - \tau$ im Allgemeinen keine Stoppzeit?

Abgabe: Bis Dienstag, den 15.5.12, in der Vorlesung.