Prof. Dr. Christian Bender Universität des Saarlandes SS 2012 22.5.12
Peter Parczewski

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 4

Aufgabe 10 (15 Punkte)

Der Weltraum - unendliche Weiten. Wir befinden uns in einer fernen Zukunft. Dies sind die Abenteuer des neuen Raumschiffs Enterprise, das viele Lichtjahre von der Erde entfernt unterwegs ist, um fremde Welten zu entdecken ... [1]

... misslich nur, wenn man so weit weg durch unbesonnene Klingonen ramponiert wird ...

Das Raumschiff ist schwer beschädigt und die Navigation ist stark eingeschränkt: Alles was man für den nächsten Raumsprung eingeben kann, ist die genaue Distanz, die als nächstes zurückgelegt wird. Die Richtung jedoch ist zufällig.
Das Raumschiff Enterprise ist im Abstand R von unserer Sonne entfernt. Unser Sonnensystem hat den Radius $r < R$. Die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Schrottkiste überhaupt jemals wieder in unser Sonnensystem zu gelangen, ist dann echt kleiner als r/R. (Diese Abschätzung ist zudem optimal.)

Wir bezeichnen mit $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im R^3, mit $S^2 = \{y \in \mathbb{R}^3 : \|y\| = 1\}$ die 2-Sphäre und mit λ die Gleichverteilung auf S^2. Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Richtungen der Raumsprünge. Diese Zufallsvariablen der Richtungen ξ_n sind i.i.d. λ-verteilt. Wir definieren $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$. Die Folge der Distanzen der Raumsprünge sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\varphi_n > 0$. Der Prozess $\varphi = (\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Raumsprungstrategie, ist $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-vorhersagbar. Wir definieren damit die Position des Raumschiffs als $X_0 = (R, 0, 0)$, $X_n = X_{n-1} + \varphi_n \xi_n$ und hierzu $Z_n := 1/\|X_n\|$. Die Ersteintrittszeit in unser Sonnensystem ist dann

$$\tau_\varphi := \inf\{n \in \mathbb{N} : \|X_n\| \le r\}.$$

Wir vernachlässigen, dass das vermaledeite Raumschiff zwischendurch auch noch in einem Hindernis (Schwarzes Loch etc.) vollends steckenbleibt.

Wir verwenden ohne Beweis:

$$\int_{S^2} \frac{1}{\|x - ry\|} d\lambda(y) = \begin{cases} 1/r & \|x\| \le r \\ 1/\|x\| & \|x\| > r \end{cases} \tag{1}$$

Zeigen Sie für alle Raumsprungstrategien $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- (i) $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist ein Supermartingal.
- (ii) Gilt sogar $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n \le \|X_{n-1}\|$, so ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal.
- (iii) Folgern Sie mit einem Martingal-Konvergenzsatz $P(\tau_\varphi < \infty) \le r/R$.
- (iv) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|X_n\| \notin \{0, r\}$ P-f.s.
- (v) Folgern Sie $P[\|X_{\tau_\varphi}\| < r | \tau_\varphi < \infty] = 1$ und $P(\tau_\varphi < \infty) < r/R$.
- (vi) Für ein beliebiges $\varepsilon \in (0, r)$ definieren wir nun $\varphi_n^\varepsilon := (\|X_{n-1}\| - (r - \varepsilon))\mathbf{1}_{\|X_{n-1}\| > r}$. Dann ist
$$P[\tau_{\varphi^\varepsilon} < \infty] \ge \frac{r - \varepsilon}{R}.$$
Sie können hierfür ohne Beweis verwenden:
- (vii*) $\{\tau_{\varphi^\varepsilon} = \infty\} \subseteq \{\lim_{m\to\infty} Z_m = 0\}$ P-f.s.

Die mit einem Stern $*$ gekennzeichneten Aufgabenteile sind Zusatzaufgaben.
Abgabe: Bis Dienstag, den 30.5.12, in der Vorlesung.

[1] Intro der Serie Raumschiff Enterprise - Das nächste Jahrhundert. USA 1987-1994.