Prof. Dr. Christian Bender — Universität des Saarlandes SS 2012 — 29.5.12
Peter Parczewski

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 5

Aufgabe 11 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, $\mathcal{T}_n := \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots,)$ und $\mathcal{T} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$. Zeigen Sie mit einem Martingalkonvergenzsatz und den Zufallsvariablen $\mathbf{1}_A$: Für alle $A \in \mathcal{T}$ gilt $P(A) \in \{0, 1\}$.

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$, $X_t : \Omega \to \{1, 2, 3\}$ eine homogene Markovkette mit Anfangsverteilung

$$\mu = (1/4, 1/4, 1/2)$$

und den Übergangswahrscheinlichkeiten $p(i|j) := P[X_{t+1} = i|X_t = j]$, $t \in \mathbb{N}$, als

$$(p(i|j))_{i,j\in\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 1/6 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Verteilung von X_2, sowie $P[X_2 = 3|X_0 = 1]$ und $P[X_3 = 3|X_1 = 1]$.

Aufgabe 13 (4+3+3* Punkte)

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine Bernoulli-Irrfahrt zum Parameter $p \in (0, 1)$, $p \neq 1/2$.

(i) Zeigen Sie für alle $i \in \mathbb{Z}$,

$$P[X_t = j|X_0 = i] = \begin{cases} \binom{t}{\frac{t+j-i}{2}} p^{(t+j-i)/2}(1-p)^{(t-j+i)/2} & , t+j-i \in 2\mathbb{N} \\ 0 & , t+j-i \notin 2\mathbb{N} \end{cases}.$$

(ii) Folgern Sie für alle $i \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{t\to\infty} P[X_t = i|X_0 = i] = 0. \tag{1}$$

(iii) Zeigen Sie (1) ebenfalls für $p = 1/2$ (und alle $i \in \mathbb{Z}$) mit Hife der Stirling-Formel.

Die mit einem Stern $*$ gekennzeichneten Aufgabenteile sind Zusatzaufgaben.
Abgabe: Bis Dienstag, den 5.6.12, in der Vorlesung.