Prof. Dr. Christian Bender
Peter Parczewski
Universität des Saarlandes SS 2012 12.6.12

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 7

Aufgabe 15 (5 Punkte)

Beweisen Sie, dass die folgenden Eigenschaften von Zuständen Klasseneigenschaften sind:

(i) Rekurrenz.

(ii) Periodizität mit Periode $d \geq 2$.

Aufgabe 16 (10 Punkte)

Sei X eine diskrete Markovkette mit Zustandsraum I und den Übergangswahrscheinlichkeiten $p(i|j)$, $i, j \in I$.

(i) Seien $i, j \in I$, i rekurrent und es gelte $p^{(n)}(j|i) > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt auch $p^{(n)}(i|j) > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Wir führen zuerst zwei Definitionen ein.
Eine Menge $C \subset I$ heißt *abgeschlossen*, wenn

$$P[\exists n \geq k : X_n \in I \setminus C | X_k \in C] = 0.$$

Eine Menge $C \subset I$ heißt *irreduzibel*, wenn

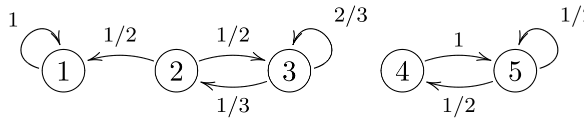
$$\forall i, j \in C \ \exists n \in \mathbb{N} : p^{(n)}(i|j) > 0.$$

Zeigen Sie nun:
Es gibt eine eindeutige Zerlegung

$$I = T \,\dot{\cup} \dot{\bigcup}_{k \in \mathbb{N}} C_k,$$

wobei T die Menge der transienten Zustände bezeichnet und $C_k \subset I$ alle abgeschlossen und irreduzibel sind.

(iii) Bestimmen Sie für die folgende diskrete Markovkette mit Zustandsraum $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (wobei der Wert über dem Pfeil $i \to j$ gerade $p(j|i) > 0$ bezeichnet, alle anderen $p(j|i)$ sind Null), die Eigenschaften aller Zustände nach Definition 8.1 und eine Zerlegung von I nach (ii).



Abgabe: Bis Dienstag, den 19.6.12, in der Vorlesung.