Prof. Dr. Christian Bender
Peter Parczewski

Universität des Saarlandes SS 2012 19.6.12

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 8

Aufgabe 17 (3 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass jede endliche Markovkette mindestens einen rekurrenten Zustand hat.
(ii) Zeigen Sie, dass in einer endlichen Markovkette alle rekurrenten Zustände positiv rekurrent sind.

Aufgabe 18 (6 Punkte)

Sei $(\pi_i)_{i\in I}$ eine Zähldichte auf der endlichen Menge I (d.h. $\pi_i > 0$ und $\sum_{i\in I} \pi_i = 1$). Mit dem Metropolis-Algorithmus kann man nun eine Markovkette auf I konstruieren, die gerade $(\pi_i)_{i\in I}$ als stationäre Grenzverteilung erhält:
Sei $p(i|j)_{i,j\in I}$ die Familie von Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen aperiodischen irreduziblen Markovkette auf I mit $p(i|j) = p(j|i)$ für alle $i, j \in I$. Wir definieren nun die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_\pi(j|i) := \begin{cases} p(j|i)(1 \wedge \frac{\pi_j}{\pi_i}) & j \neq i \\ p(j|j) + \sum\limits_{k\neq j} p(j|k)(1 - (1 \wedge \frac{\pi_k}{\pi_j})) & j = i \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) $(\pi_i)_{i\in I}$ ist stationär für die Familie $p_\pi(i|j)_{i,j\in I}$.
(ii) Die von $p_\pi(i|j)_{i,j\in I}$ erzeugte Markov-Kette auf I ist irreduzibel.
(iii) $(\pi_i)_{i\in I}$ ist die stationäre Grenzverteilung von $p_\pi(i|j)_{i,j\in I}$.
(iv) Sei nun die Verteilung $\pi_1 = 0.2, \pi_2 = 0.1, \pi_3 = 0.7$ und die Übergangsmatrix

$$p(j|i)_{i,j\in\{1,2,3\}} = \begin{pmatrix} 1-2x & x & x \\ x & 1-2x & x \\ x & x & 1-2x \end{pmatrix}$$

für ein $x \in (0, \frac{1}{2})$. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix $p_\pi(j|i)_{i,j\in\{1,2,3\}}$ und rechnen Sie nach, dass $\pi_1 = 0.2, \pi_2 = 0.1, \pi_3 = 0.7$ tatsächlich die stationäre Verteilung davon ist.

Aufgabe 19 (6 Punkte)

Das Ehrenfest-Modell ist ein Urnenmodell für das thermodynamische Gleichgewicht. Seien $N \in \mathbb{N}$ (nummerierte) Kugeln, welche auf zwei Urnen aufgeteilt sind. Zu jedem Zeitpunkt wird eine Kugel zufällig ausgewählt und mit der Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ in die andere Urne gelegt (bzw. mit der Wahrscheinlichkeit $1 - p$ in der Urne gelassen, in der sie sich befindet). Es sei X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n.

(i) Stellen Sie die Übergangsmatrix $p(j|i)_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}$ der Markov-Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf und ermitteln Sie

$$p^{(2)}(j|i)_{i,j\in\{1,\ldots,N\}}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass die $(N, 1/2)$-Binomialverteilung die stationäre Grenzverteilung dieser Markov-Kette ist.

Abgabe: Bis Dienstag, den 26.6.12, in der Vorlesung.