Prof. Dr. Christian Bender
Peter Parczewski Universität des Saarlandes SS 2012 26.6.12

Stochastische Prozesse

Übungsblatt 9

Aufgabe 20 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Zylindermengen im $\mathbb{R}^\infty$,

$$\mathcal{K}^\infty := \left\{ \{x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in B\} \ , \ B \in \mathcal{B}^{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

einen Mengenkörper bilden.

Aufgabe 21 (4+3 Punkte)

(i) Zeigen Sie für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ und jedes W-Maß P auf $\mathcal{B}^n$ gilt:

$$\forall B \in \mathcal{B}^n \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon \in \mathcal{B}^n \text{ kompakt } : \ P(B \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

(ii) Folgern Sie in der Situation von Satz 9.2:
Für jede Folge $(A_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^\infty$ von der Form,

$$A_m = \{x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : (x_0, x_1, \ldots, x_m) \in B_m\}$$

mit $B_m \in \mathcal{B}^m$ und $A_{m+1} \subset A_m$ existiert eine Folge $(\widetilde{A}_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^\infty$ von der Form,

$$\widetilde{A}_m = \{x = (x_0, x_1, \ldots) \in \mathbb{R}^\infty : (x_0, x_1, \ldots, x_m) \in C_m\}$$

mit $C_m \in \mathcal{B}^m$ kompakt, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall m \in \mathbb{N} \ : \ \mu(A_m \setminus \widetilde{A}_m) < \varepsilon 2^{-(m+1)}.$$

Folgern Sie damit:

$$\lim_{m \to \infty} \mu(A_m) = \varepsilon > 0 \ \Rightarrow \ \lim_{m \to \infty} \mu \left(\bigcap_{k \le m} \widetilde{A}_k \right) \ge \varepsilon / 2 > 0.$$

Abgabe: Bis Dienstag, den 3.7.12, in der Vorlesung.