

Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Übungsblatt 9

Aufgabe 32 (3 Punkte)

Zeigen Sie für eine \mathbb{N} -wertige Zufallsvariable Y ,

$$\mathbb{E}[Y^2] = \sum_{k \geq 1} (2k - 1)P[Y \geq k].$$

Aufgabe 33 (3+3+3 Punkte)

Seien $n, N \geq 1$, X_1, \dots, X_n unabhängig Laplace-verteilt auf $\{1, \dots, N\}$.

Zeigen Sie:

(i) Die Zufallsvariablen $(\min_{i \leq n} X_i - 1)$ und $(N - \max_{i \leq n} X_i)$ sind identisch verteilt.

(ii) Zeigen Sie mit Aufgabe 32

$$\mathbb{E}[(\min_{i \leq n} X_i - 1)^2] = - \sum_{k=2}^N \left(\frac{k-1}{N} \right)^n + 2N \sum_{k=2}^N \left(\left(\frac{k-1}{N} \right)^n - \left(\frac{k-1}{N} \right)^{n+1} \right) = \mathbb{E}[(N - \max_{i \leq n} X_i)^2].$$

(iii) Folgern Sie

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}[(\min_{i \leq n} X_i - 1)^2] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \mathbb{E}[(N - \max_{i \leq n} X_i)^2] = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

Aufgabe 34 (4+4 Punkte)

Wir betrachten nun die Schätzer aus Beispiel 10.10. Seien $n \geq 1$, X_1, \dots, X_n unabhängig Laplace-verteilt auf $\{1, \dots, N\}$ mit unbekanntem Parameter $N \in \mathbb{N}$, sowie

$$T_n^* := \max_{i \leq n} X_i, \quad \tilde{T}_n := 2\bar{X}_n - 1.$$

Zeigen Sie:

(a) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \text{Var}_N(\tilde{T}_n) = \frac{1}{3n}.$

(b) $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \text{Var}_N(T_n^*) = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$ Verwenden Sie Aufgabe 33 (iii)!

Abgabe: Bis Donnerstag, den 21.6.12, 10.30 Uhr in den Briefkästen im Hörsaalgebäude E 2 5, Untergeschoss.