Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

1. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $q \in [0, 1]$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $p : \{0, 1\}^n \rightarrow [0, 1]$, welche durch

$$\forall i_1, \dots, i_n \in \{0, 1\} : p(i_1, \dots, i_n) = q^{\sum_{j=1}^n i_j} (1 - q)^{n - \sum_{j=1}^n i_j}$$

gegeben ist, eine Zähldichte auf $\Omega = \{0, 1\}^n$ definiert.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es seien A und B zwei Ereignisse auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Wir definieren die *symmetrische Differenz* als

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Zeigen Sie:

- (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- (ii) $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.
- (iii) Für $P(A) = \frac{1}{2}$ und $P(B) = \frac{3}{4}$ folgt

$$\frac{1}{4} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{2}.$$

Geben Sie Beispiele von Paaren (A, B) an, so dass jeweils aus einer Ungleichung eine Gleichheit wird.