Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Alexandra Lauer

Universität des Saarlandes, SoSe 2014
09. Juli 2014

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

12. Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ Realisierungen aus $n \in \mathbb{N}$ unabhängigen Bernoulli(p)-verteilten Zufallsvariablen, wobei der Parameter $p \in [0,1]$ unbekannt ist. Wir definieren Schätzer $\widehat{T}_n$ und $\widehat{S}_n$ für $g(p) = p$:

$$\begin{aligned}
\widehat{T}_n(x_1, \ldots, x_n) &:= \overline{x}_n, \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n; \\
\widehat{S}_n(x_1, \ldots, x_n) &:= \frac{1}{n+2}(1 + n\overline{x}_n), \qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n.
\end{aligned}$$

(i) Untersuchen Sie $\widehat{S}_n$ auf Erwartungstreue für p.

(ii) Berechnen Sie die mittleren quadratischen Fehler von $\widehat{T}_n$ und $\widehat{S}_n$.

(iii) Bestimmen Sie diejenigen $p \in [0,1]$ für die $R(p, \widehat{T}_n) > R(p, \widehat{S}_n)$ gilt. Steht dieses Resultat im Widerspruch zur Varianzoptimalität von $\widehat{T}_n$ (vgl. Folgerung 9.9 in der Vorlesung)?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige und gleichverteilte Zufallsvariablen auf der Menge $\{a - 5, \ldots, a + 5\}$ für ein festes, aber unbekanntes $a \in \mathbb{Z}$. Geben Sie ein passendes statistisches Modell an und untersuchen Sie, ob

$$T_n(x_1, \ldots, x_n) := \left\lceil \frac{\max_{k=1,\ldots,n} x_k + \min_{k=1,\ldots,n} x_k}{2} \right\rceil$$

ein Maximum-Likelihood-Schätzer für a ist. Für $y \in \mathbb{R}$ bezeichne hierbei $\lceil y \rceil$ die kleinste ganze Zahl, welche größer oder gleich y ist.