

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

6. Übung

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Es seien X und Y unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen zum Parameter $\frac{1}{2}$.

- (i) Untersuchen Sie, ob $X + Y$ und $|X - Y|$ unkorreliert und/ oder unabhängig sind.
- (ii) Für alle $\varrho \in [-1, 1]$ sei $Z := \varrho \cdot X + \sqrt{1 - \varrho^2} \cdot Y$. Berechnen Sie $\text{Corr}(X, Z)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable mit $\text{Var}[X] < \infty$. Zeigen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$

$$E[|X - a|^2] \geq \text{Var}[X]$$

und dass Gleichheit genau dann erfüllt ist, wenn $a = E[X]$ gilt.