Dr. Robert Knobloch
M.Sc. Alexandra Lauer

Universität des Saarlandes, SoSe 2014
11. Juni 2014

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

8. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer nichtleeren Menge Ω und sei die Funktion $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit $P(\Omega) = 1$ additiv, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, gilt $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) P ist σ-additiv.

(ii) P ist stetig von unten.

(iii) P ist stetig von oben.

(iv) P ist stetig (von oben) in $\emptyset$.

(v) P ist stetig (von unten) in Ω.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für nichtleere Mengen Ω und Ω_0:

(i) Seien $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\Omega_0 \subset \Omega$. Dann ist $\mathcal{F} \cap \Omega_0 := \{A \cap \Omega_0 : A \in \mathcal{F}\}$ eine σ-Algebra auf Ω_0.

(ii) Sei $E = \{A\}$ für ein $A \subset \Omega$. Dann gilt $\sigma(E) = \{\emptyset, A, A^\complement, \Omega\}$.

(iii) Für $E := \{A \subset \Omega : A \text{ endlich}\}$ ist $\sigma(E) = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^\complement \text{ höchstens abzählbar}\}$.