

## Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

### 10. Übung

#### Aufgabe 1 (3+2 Punkte)

Sei  $N$  eine Poissonverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Parameter  $\lambda > 0$  und seien  $\alpha \in (0, 1)$  sowie  $\lambda_0 > 0$  fest gewählt. Zudem seien  $\underline{\lambda}^{(\alpha)}(n)$  und  $\bar{\lambda}^{(\alpha)}(n)$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , wie in Aufg. 3 des 9. Übungsblattes definiert.

- (i) Zeigen Sie, dass der Test, welcher die Hypothese „ $\lambda > \lambda_0$ “ gegen die Alternative „ $\lambda \leq \lambda_0$ “ für Beobachtungen  $n \in \mathbb{N}_0$  mit  $\bar{\lambda}^{(2\alpha)}(n) \leq \lambda_0$  verwirft, Niveau  $\alpha$  hat.
- (ii) Geben Sie analog zu (i) einen Test zum Niveau  $\alpha$  an, der die Hypothese „ $\lambda \leq \lambda_0$ “ gegen die Alternative „ $\lambda > \lambda_0$ “ testet.

#### Aufgabe 2 (3+2 Punkte)

Um zu testen, ob in einem Paket, das 100 Glühbirnen enthält, weniger als 10 defekte Glühbirnen enthalten sind, prüft ein Händler beim Kauf 10 der Glühbirnen und nimmt das Paket nur an, wenn alle 10 in Ordnung sind.

- (i) Geben Sie ein geeignetes diskretes statistisches Modell sowie Hypothese, Alternative und Verwerfungsbereich eines geeigneten Tests an, um das Verhalten des Händlers testtheoretisch zu beschreiben.
- (ii) Geben Sie das effektive Niveau (gerundet auf die 4. Nachkommastelle) des in (i) beschriebenen Tests an.

#### Aufgabe 3 (2+4 Punkte)

Wir wollen eine Aussage über die Verunreinigung von Kleesaatgut durch Flachs machen. Dazu werden 100g Saatgut, was sehr vielen Samen entspricht, ausgebracht und es wird die im Verhältnis zur Gesamtanzahl der Samen sehr geringe Anzahl der aufgegangenen Flachssamen gezählt.

- (i) Begründen Sie, warum obige Situation mittels einer Poissonverteilung mit unbekanntem Parameter  $\lambda > 0$  modelliert werden kann.
- (ii) Der Hersteller vermutet, dass pro 100g Packung Saatgut im Mittel nicht mehr als 6 Flachssamen aufgehen und will testen, ob er diese Vermutung guten Gewissens in der Werbung als Behauptung darstellen kann. Dabei soll der Test so konzipiert sein, dass die Wahrscheinlichkeit, fälschlicherweise die hohe Qualität zu behaupten durch 5% beschränkt ist. Geben Sie dazu einen geeigneten Test an. Wie entscheidet dieser Test, wenn bei der Aussaat einer konkreten 100g Packung Saatgut genau 4 Flachssamen aufgehen?

*Hinweis:* Es gelten folgende Werte, wobei  $G_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , wie in Aufg. 3 von ÜB 9 definiert sei:

$$G_4^{-1}(0,025) = 1,09, \quad G_4^{-1}(0,05) = 1,365, \quad G_4^{-1}(0,95) = 7,755, \quad G_4^{-1}(0,975) = 8,765$$

$$G_5^{-1}(0,025) = 1,625, \quad G_5^{-1}(0,05) = 1,97, \quad G_5^{-1}(0,95) = 9,155, \quad G_5^{-1}(0,975) = 10,24$$

#### **Aufgabe 4** (4 Punkte)

Bei einer Razzia findet die Polizei bei einem Glücksspieler  $G$  eine angeblich faire Münze, von der ein anderer Spieler jedoch behauptet, dass „Zahl“ unfairerweise mit einer höheren Wahrscheinlichkeit als 0,5 erscheint. Aus Zeitgründen kann die Münze nur 10 Mal überprüft werden. Geben Sie einen geeigneten Test gemäß dem Rechtsgrundsatz „Im Zweifel für den Angeklagten“ an, so dass  $G$  nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 0,05 des Betruges verdächtigt wird.