Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SoSe 2015
03. Juli 2015

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

11. Übung

Für ein Mengensystem $\mathcal{M} \subset 2^\Omega$ bezeichne $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ die von $\mathcal{M}$ erzeugte σ-Algebra auf Ω.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Geben Sie explizite Darstellungen folgender σ-Algebren auf $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ an:

$$\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}(\{1\}, \{2, 3\}), \qquad \mathcal{A}_2 := \mathcal{A}(\{1, 2\}, \{3\}), \qquad \mathcal{A}_3 := \mathcal{A}(\{1, 3\}, \{2\}).$$

Untersuchen Sie außerdem, ob

$$\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2, \qquad \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_3, \qquad \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_3$$

σ-Algebren auf Ω sind.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer nichtleeren Menge Ω und sei die Funktion $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ mit $P(\Omega) = 1$ additiv, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt, gilt $P(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) P ist σ-additiv.

(ii) P ist stetig von unten, d.h. es gilt

$$A_n \subset A_{n+1} \, \forall \, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

(iii) P ist stetig von oben, d.h. es gilt

$$A_n \supset A_{n+1} \, \forall \, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

(iv) P ist stetig (von oben) in $\emptyset$, d.h. es gilt

$$A_n \supset A_{n+1} \, \forall \, n \in \mathbb{N} \text{ und } \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad P(\emptyset) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

(v) P ist stetig (von unten) in Ω, d.h. es gilt

$$A_n \subset A_{n+1} \, \forall \, n \in \mathbb{N} \text{ und } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega \quad \Longrightarrow \quad P(\Omega) = \lim_{n \to \infty} P(A_n).$$

Aufgabe 3 (3+1+2 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen für nichtleere Mengen Ω und Ω_0:

(i) Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $\Omega_0 \subset \Omega$. Dann ist $\mathcal{A} \cap \Omega_0 := \{A \cap \Omega_0 : A \in \mathcal{A}\}$ eine σ-Algebra auf Ω_0.

(ii) Sei $E = \{A\}$ für ein $A \subset \Omega$. Dann gilt $\mathcal{A}(E) = \{\emptyset, A, A^\complement, \Omega\}$.

(iii) Für $E := \{A \subset \Omega : A \text{ endlich}\}$ gilt $\mathcal{A}(E) = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^\complement \text{ höchstens abzählbar}\}$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Sei $\Omega := \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A}(\{\{n\} \subset \Omega : n \text{ ist Primzahl}\})$. Bestimmen Sie eine σ-Algebra $\mathcal{A}_2$ auf Ω derart, dass $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ keine σ-Algebra auf Ω ist und begründen Sie dies.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$ äquivalent ist zu

(i) $\mathcal{A}(\{(a, b) \subset \mathbb{R} : a \leq b\})$,

(ii) $\mathcal{A}(\{[a, b] \subset \mathbb{R} : a \leq b\})$,

(iii) $\mathcal{A}(\{[a, b) \subset \mathbb{R} : a \leq b\})$.