

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

13. Übung

Aufgabe 1 (4+2+2 Punkte)

- (i) Wir betrachten das rein zufällige Werfen eines Streichholzes der Länge $2l$, $l \in (0, 1/2)$, auf einer ebenen Unterlage, auf welcher parallele Linien mit Abstand $d = 1$ eingezeichnet sind. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Streichholz eine der Geraden schneidet, den Wert $4l/\pi$ hat. Modellieren Sie hierzu den Abstand des mit M bezeichneten Mittelpunktes des Streichholzes zur nächstgelegenen Geraden durch eine Zufallsvariable X , welche auf $(0, 1/2)$ gleichverteilt ist. Zudem sei der im Uhrzeigersinn gemessene Winkel Ψ zwischen dieser Geraden und dem Streichholz (stochastisch) unabhängig von X und auf $[0, \pi]$ gleichverteilt.
- (ii) Benutzen Sie das Ergebnis aus (i), um mit Wahrscheinlichkeit 1 eine Approximation der Kreiszahl π zu erhalten, welche nur von l , der großen Anzahl $n \in \mathbb{N}$ der Durchführungen des in (i) beschriebenen Experimentes und der zufälligen Anzahl $K \leq n$ der Würfe bei den n Durchführungen, bei welchen das Streichholz eine der Linien schneidet, abhängt.
- (iii) Führen Sie das in (i) beschriebene Experiment 30 mal auf einem Blatt Papier durch und zeichnen Sie jeweils die Lages des Streichholzes ein, wobei das Verhältnis zwischen der Länge $2l$ des Streichholzes und dem Zeilenabstand d den Wert $1/2$ haben soll (wenn $d = 1\text{cm}$ gewählt wird, sollte das Streichholz also $0,5\text{cm}$ lang sein). Bestimmen Sie die Anzahl $k \leq 30$ der Durchführungen, bei welchen das jeweilige Streichholz eine der Linien schneidet, vergleichen Sie den damit berechneten Wert $k/30$ mit der in (i) bestimmten Wahrscheinlichkeit und begründen Sie, ob Ihr Ergebnis plausibel ist. Geben Sie das Blatt mit den Zeichnungen bitte mit ab.

Hinweis: Falls Sie in (iii) $d \neq 1\text{cm}$ wählen, können Sie verwenden, dass die in (i) bestimmte Wahrscheinlichkeit für $d > 2l$ den Wert $\frac{4l}{d\pi}$ hat.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Es sei X eine reelle Zufallsvariable mit Dichte f_X , gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_X(x) := e^{-c|x|},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

- (i) Bestimmen Sie die Konstante c .
- (ii) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $Y := \frac{3}{4}e^X$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Familie von Zufallsvariablen, wobei X_n , $n \in \mathbb{N}$, Bernoulli(p_n)-verteilt ist mit $p_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Zeigen Sie, dass $X_n \rightarrow 0$ in Wahrscheinlichkeit für $n \rightarrow \infty$ gilt.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte)

Seien X und Y unabhängige $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass

- (i) $Z := X^2$ die Dichte f_Z , gegeben durch

$$\forall x \in \mathbb{R} : f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x),$$

hat.

- (ii) $X^2 + Y^2$ exponentialverteilt mit Parameter $\frac{1}{2}$ ist.

Hinweis: In (ii) können Sie die Substitution $y = x(1 - u^2)$ verwenden.