Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

4. Übung

Es seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter W-Raum, $A \subset \Omega$ ein Ereignis mit $P(A) > 0$ und X eine P-integrierbare Zufallsvariable auf Ω. Dann heißt

$$E[X|A] := E_P[X|A] := \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\{\omega\})$$

bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung A.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter W-Raum, $A \subset \Omega$ ein Ereignis mit $P(A) > 0$ und X eine P-integrierbare Zufallsvariable auf Ω. Zeigen Sie, dass

$$E_P[X|A] = E_{P(\cdot|A)}[X].$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Es seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter W-Raum und X eine P-integrierbare Zufallsvariable auf Ω. Außerdem sei $(A_i)_{i \in I}$, I höchstens abzählbar, eine Partition von Ω mit $P(A_i) > 0$ für jedes $i \in I$. Zeigen Sie, dass

$$E[X] = \sum_{i \in I} E[X|A_i] P(A_i).$$

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)

Es werde wiederholt ein fairer Würfel geworfen. Solange keine 6 auftritt, werden die erzielten Augenzahlen addiert. Das Spiel kann jederzeit gestoppt werden. Der erzielte Punktestand ist dann der Gewinn. Würfelt man eine 6, so fällt man auf 0 Punkte zurück und gewinnt nichts.

(i) Wir betrachten die Strategie, bei welcher k-mal, $k \in \mathbb{N}$, gewürfelt und dann das Spiel gestoppt wird, falls vorher keine 6 auftritt. Tritt vorher eine 6 auf, so ist das Spiel vorzeitig mit Gewinn 0 beendet. Zeigen Sie, dass bei dieser Strategie der Erwartungswert des Spielgewinns G_k durch

$$E[G_k] = 3k \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

gegeben ist. Welcher Wert für k maximiert $E[G_k]$?

(ii) Wir betrachten nun die Strategie, bei der das Spiel gestoppt wird, sobald der aktuelle Punktestand mindestens $K \in \mathbb{N}$ ist. Berechnen Sie den Wert von K bei dem man das Spiel stoppen sollte, damit der erwartete Gewinn maximal wird.

Hinweis: Bestimmen Sie für (ii) dasjenige K, ab welchem der erwartete Zuwachs beim Weiterspielen nicht mehr positiv ist.

Aufgabe 4 (2+1+5 Punkte)

Es seien (Ω_1, p_1) ein diskretes Zufallsexperiment und $\Omega_2 \neq \emptyset$ eine höchstens abzählbare Menge. Außerdem sei für jedes $\omega_1 \in \Omega_1$ durch $p_2(\cdot|\omega_1) : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ eine Zähldichte auf Ω_2 gegeben. Wir betrachten eine Funktion p auf $\Omega_1 \times \Omega_2$, welche durch $p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2|\omega_1)$ definiert ist.

(i) Zeigen Sie, dass p eine Zähldichte auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist.

(ii) Sei P das von p induzierte W-Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, 2^{\Omega_1 \times \Omega_2})$. Zeigen Sie, dass

$$P(\Omega_1 \times A_2 | \{\omega_1\} \times \Omega_2) = \sum_{\omega_2 \in A_2} p_2(\omega_2|\omega_1)$$

für jedes $A_2 \subset \Omega_2$ gilt.

(iii) Welche Bedingungen muss man an p_2 stellen, damit unter P alle Ereignisse der Form $A_1 \times \Omega_2$ und $\Omega_1 \times A_2$; $A_1 \subset \Omega_1$, $A_2 \subset \Omega_2$; unabhängig sind?