Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

5. Übung

Für ein W-Maß P auf $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$ nennt man die durch

$$g_P(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} t^k P(\{k\})$$

für jedes $t \in [0,1]$ definierte Funktion $g_P : [0,1] \to \mathbb{R}$ die zu P gehörende *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion.*

Für jede Zufallsvariable X bezeichne P_X die Verteilung von X.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Sei P ein W-Maß auf $(\mathbb{N}_0, 2^{\mathbb{N}_0})$. Zeigen Sie, dass g_P auf $[0,1)$ beliebig oft differenzierbar ist (wobei in 0 die rechtsseitige Ableitung gemeint ist) und dass

$$P(\{n\}) = \frac{1}{n!} g_P^{(n)}(0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, wobei $g_P^{(n)}$ die n-te Ableitung von g_P bezeichne.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine Zufallsvariable auf einem diskreten W-Raum $(\Omega, 2^\Omega, P)$. Zeigen Sie, dass

(i)
$$E[X] = \lim_{t \uparrow 1} g'_{P_X}(t)$$

(ii) und, wenn X P-integrierbar ist,
$$E[X^2] = \lim_{t \uparrow 1} g''_{P_X}(t) + E[X]$$

gelten.

Aufgabe 3 (4+4 Punkte)

Sei X eine binomial(n,p)-verteilten Zufallsvariable, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X

(i) mittels der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion,

(ii) ohne die Faltungsformel oder die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion zu benutzen.

Aufgabe 4 (5+1 Punkte)

Seien X und Y Zufallsvariablen mit $E[X^2] < \infty$, $\mathrm{Var}(X) > 0$ und $E[Y^2] < \infty$. Außerdem seien $a^*, b^* \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$E\left[|Y - (a^* X + b^*)|^2\right] = \min_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} E\left[|Y - (aX + b)|^2\right].$$

(i) Bestimmen Sie a^* und b^*.

(ii) Zeigen Sie, dass $a^* = 0$ genau dann, wenn X und Y unkorreliert sind.