Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, SoSe 2015

29. Mai 2015

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

6. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie für $A, B \in 2^\Omega$ die Äquivalenz folgender Aussagen:

(i) A und B sind unabhängige Ereignisse,

(ii) $\mathbb{1}_A$ und $\mathbb{1}_B$ sind unabhängige Zufallsvariablen, wobei

$$\forall\, C \in 2^\Omega,\, \forall\, \omega \in \Omega:\ \mathbb{1}_C(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in C \\ 0, & \omega \notin C. \end{cases}$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Seien Y und Z unabhängige Zufallsvariablen, wobei

$$P(\{Y = 1\}) = P(\{Y = -1\}) = P(\{Z = 1\}) = P(\{Z = -1\}) = \frac{1}{2}.$$

Des Weiteren sei $X := \varrho Y + \sqrt{1 - \varrho^2} Z$ für $\varrho \in [0, 1]$. Berechnen Sie die Korrelation von X und Y.

Aufgabe 3 (3+2 Punkte)

In der gynäkologischen Abteilung eines Krankenhauses entbinden in einer bestimmten Woche $n \in \mathbb{N}$ Frauen. Es werde angenommen, dass keine Mehrlingsgeburten auftreten. Weiterhin werde angenommen, dass bei jeder Geburt die Wahrscheinlichkeit für einen Jungen gleich der Wahrscheinlichkeit für ein Mädchen sei und dass das Geschlecht der Neugeborenen für alle Geburten stochastisch unabhängig sei. Wir bezeichnen mit p_n die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 60% der Neugeborenenen weiblich sind.

(i) Beweisen oder widerlegen Sie, dass $p_{100} < p_{10}$, ohne den exakten Wert für p_{100} explizit zu verwenden.

(ii) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

Aufgabe 4 (3+2 Punkte)

Sei $N \in \mathbb{N}$. Außerdem sei $(X_n)_{n=1,\dots,N}$ eine Familie von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, 2^\Omega, P)$ mit $E[X_n] = 0$ für jedes $n \in \{1,\dots,N\}$ und es gelte $\mathrm{Cov}(X_n, X_m) = n^2 + m^2 - (n-m)^2$ für alle $n, m \in \{1,\dots,N\}$.

(i) Berechnen Sie die Varianz von

$$S_N := \sum_{n=1}^{N} X_n.$$

(ii) Beweisen Sie mittels der Tschebyscheff-Ungleichung, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $f_\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f_\varepsilon(n) \to 0$ für $n \to \infty$ gibt, so dass

$$P\left(\left\{|S_N| > N^3\varepsilon\right\}\right) \le f_\varepsilon(N).$$