

Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

9. Übung

Wie in der Vorlesung verwenden wir für $n \in \mathbb{N}$ die Definition

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \quad \bar{X}_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Aufgabe 1 (1+3+2 Punkte)

Es seien $x_1, \dots, x_n$ Realisierungen aus $n \in \mathbb{N}$ unabhängigen Bernoulli(p)-verteilten Zufallsvariablen, wobei der Parameter $p \in [0, 1]$ unbekannt sei. Wir definieren Schätzer T_n und S_n für p durch

$$T_n : \{0, 1\}^n \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \bar{X}_n(x),$$

$$S_n : \{0, 1\}^n \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \frac{1}{n+2}(1 + n\bar{X}_n(x)).$$

- (i) Untersuchen Sie S_n auf Erwartungstreue für p .
- (ii) Berechnen Sie die mittleren quadratischen Fehler $R(p, T_n)$ und $R(p, S_n)$ von T_n und S_n .
- (iii) Bestimmen Sie diejenigen $p \in [0, 1]$ für die $R(p, T_n) > R(p, S_n)$ gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Seien $X_1, \dots, X_n$, $n \in \mathbb{N}$, unabhängige und diskret gleichverteilte Zufallsvariablen auf der Menge

$$\{a - 5, \dots, a + 5\}$$

für ein festes, aber unbekanntes $a \in \mathbb{Z}$. Geben Sie ein passendes statistisches Modell an und untersuchen Sie, ob

$$T := \left\lceil \frac{\max_{k=1, \dots, n} X_k + \min_{k=1, \dots, n} X_k}{2} \right\rceil$$

ein Maximum-Likelihood-Schätzer für a ist. Für $y \in \mathbb{R}$ bezeichne hierbei $\lceil y \rceil$ die kleinste ganze Zahl, welche größer oder gleich y ist.

Aufgabe 3 (1+3+6 Punkte)

Sei $\alpha \in (0, 1)$. Wir wollen für den unbekannten Parameter $\lambda \in (0, \infty)$ einer Poissonverteilten Zufallsvariable ein Konfidenzintervall zum Niveau $1 - \alpha$ herleiten. Dazu definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$G_n : (0, \infty) \rightarrow (0, 1), \quad \lambda \mapsto 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}.$$

- (i) Stellen Sie ein geeignetes diskretes statistisches Modell für obige Situation auf.
- (ii) Zeigen Sie, dass die Funktion G_n , $n \in \mathbb{N}$, stetig differenzierbar mit positiver Ableitung ist und dass

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G_n(\lambda) = 1 \quad \text{sowie} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} G_n(\lambda) = 0$$

gelten.

- (iii) Für $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir

$$\underline{\lambda}^{(\alpha)}(n) := \begin{cases} G_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), & n \geq 1 \\ 0, & n = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad \bar{\lambda}^{(\alpha)}(n) := G_{n+1}^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Zeigen Sie, dass

$$\left(\left(\underline{\lambda}^{(\alpha)}(n), \infty\right)\right)_{n \in \mathbb{N}_0} \quad \text{sowie} \quad \left(\left(0, \bar{\lambda}^{(\alpha)}(n)\right)\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

Konfidenzintervalle für λ zum Niveau $1 - \alpha/2$ sind und dass

$$\left(\left(\underline{\lambda}^{(\alpha)}(n), \bar{\lambda}^{(\alpha)}(n)\right)\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

ein Konfidenzintervall für λ zum Niveau $1 - \alpha$ ist. Betrachten Sie dazu

$$n_-(\lambda) := \sup \left\{ n \in \mathbb{N} : P_\lambda(\{0, \dots, n-1\}) \leq \frac{\alpha}{2} \right\}$$

$$n_+(\lambda) := \inf \left\{ n \in \mathbb{N}_0 : P_\lambda(\{n+1, n+2, \dots\}) \leq \frac{\alpha}{2} \right\},$$

wobei $\sup(\emptyset) := 0$, und zeigen Sie, dass für

- $n_+(\lambda) \geq 1$:

$$n \leq n_+(\lambda) \implies \lambda > \underline{\lambda}^{(\alpha)}(n),$$

- $n_-(\lambda) \geq 1$:

$$n \geq n_-(\lambda) \implies \lambda < \bar{\lambda}^{(\alpha)}(n).$$