Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2013/14
23. Oktober 2013

Mathematik für Informatiker III

1. Übung

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche durch

$$f(0,0) := 0 \qquad \text{und} \qquad f(x,y) := \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben ist.

(a) Zeigen Sie, dass f eine C^1-Funktion auf $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ existieren und stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(0,0) = 1$ sowie $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}(0,0) = -1$ gelten, und begründen Sie, warum dies nicht im Widerspruch zu 52.10 steht.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{-1}{\|x\|^{n-2}}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wobei $\|x\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass f eine harmonische Funktion ist.