Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2013/14
08. Januar 2014

Mathematik für Informatiker III

10. Übung

Es seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter W-Raum, $A \subset \Omega$ ein Ereignis mit $P(A) > 0$ und X eine P-integrierbare Zufallsvariable auf Ω. Dann heißt

$$E(X|A) := \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in A} X(\omega) P(\{\omega\})$$

bedingter Erwartungswert von X unter der Bedingung A.

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Es seien $(\Omega, 2^\Omega, P)$ ein diskreter W-Raum und X eine P-integrierbare Zufallsvariable auf Ω. Außerdem seien $A_1, A_2, \dots$ höchstens abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Ereignisse, mit $P(A_n) > 0$ für jedes n, so dass $\sum_{n \geq 1} P(A_n) = 1$. Zeigen Sie, dass

$$E(X) = \sum_{n \geq 1} E(X|A_n) P(A_n)$$

gilt.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es werde wiederholt ein fairer Würfel geworfen. Solange keine 6 auftritt, werden die erzielten Augenzahlen addiert. Das Spiel kann jederzeit gestoppt werden. Der erzielte Punktestand ist dann der Gewinn. Würfelt man eine 6, so fällt man auf 0 Punkte zurück und gewinnt nichts.

(i) Wir betrachten die Strategie, bei welcher k-mal, $k \in \mathbb{N}$, gewürfelt und dann das Spiel gestoppt wird, falls vorher keine 6 auftritt. Tritt vorher eine 6 auf, so ist das Spiel vorzeitig mit Gewinn 0 beendet. Zeigen Sie, dass bei dieser Strategie der Erwartungswert des Spielgewinns G_k durch

$$E(G_k) = 3k \left(\frac{5}{6}\right)^k$$

gegeben ist. Welcher Wert für k maximiert $E(G_k)$?

(ii) Wir betrachten nun die Strategie, bei der das Spiel gestoppt wird, sobald der aktuelle Punktestand mindestens $K \in \mathbb{N}$ ist. Berechnen Sie den Wert von K bei dem man das Spiel stoppen sollte, damit der erwartete Gewinn maximal wird.

Hinweis: Bestimmen Sie für (ii) dasjenige K, ab welchem der erwartete Zuwachs beim Weiterspielen nicht mehr positiv ist.