

Mathematik für Informatiker III

2. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine auf $\mathbb{R}^n$ total differenzierbare Funktion und existiere ein $\alpha > 0$ derart, dass $f(tx) = t^\alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $t > 0$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \dots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha f(x)$$

für alle $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Hinweis:

Definieren Sie für ein fest gewähltes $x \in \mathbb{R}^n$ eine Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $g(t) = f(tx)$ und berechnen Sie $g'(1)$ auf zweierlei Weise.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, welche durch

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin((x^2 + y^2)^{-1/2}), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ definiert ist. Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ total differenzierbar ist und dass ihre beiden partiellen Ableitungen dort unstetig sind.