

Mathematik für Informatiker III

6. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zu Satz 60.5. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und D ein Rechteck (in $\mathbb{R}^2$). Außerdem seien $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ über D (Riemann-)integrierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass $\alpha f + g$ über D integrierbar ist und

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + g(x, y)) \, d(x, y) = \alpha \iint_D f(x, y) \, d(x, y) + \iint_D g(x, y) \, d(x, y)$$

gilt.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} 1, & y \text{ ist rational} \\ 2x, & y \text{ ist irrational.} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass für jedes $y \in [0, 1]$ das Integral $\int_0^1 f(x, y) \, dx$ existiert und $\int_0^1 f(x, y) \, dx = 1$ gilt.
- (b) Zeigen Sie, dass das iterierte Integral $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy$ existiert und $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) \, dx \, dy = 1$ gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass f über $[0, 1]^2$ nicht integrierbar ist.