

Mathematik für Informatiker III

7. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := x^2 + y.$$

und bezeichne D das Dreieck, welches von den Punkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(2, 1)$ gebildet wird. Berechnen Sie das Integral

$$\iint_D f(x, y) d(x, y)$$

mittels der Transformationsregel und der Funktion, welche das Dreieck das von den Punkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ erzeugt wird auf das Dreieck D abbildet.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Die Eulersche Betafunktion B und die Gammafunktion Γ sind gegeben durch

$$B(p, q) := 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2q-1}(\phi) \sin^{2p-1}(\phi) d\phi,$$

$$\Gamma(p) := \int_0^\infty e^{-t} t^{p-1} dt$$

für alle $p, q > 0$. Für $\varrho > 0$ bezeichne D_ϱ das Dreieck mit den Ecken $(0, 0)$, $(0, \varrho)$ und $(\varrho, 0)$. Zeigen Sie, dass

$$(1) \quad \iint_{D_\varrho} e^{-(x+y)} x^{q-1} y^{p-1} d(x, y) = 2 \int_0^{\pi/2} \int_0^\varrho e^{-r} r^{p+q-1} \cos^{2q-1}(\phi) \sin^{2p-1}(\phi) dr d\phi$$

für alle $\varrho > 0$ gilt und leiten Sie damit die Formel

$$(2) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

für alle $p, q > 0$ her.