Dr. Robert Knobloch
Christian Gärtner

Universität des Saarlandes, Wintersemester 2014/15
20. November 2014

Diskrete Finanzmathematik

Blatt 3

Aufgabe 1 (2+1+1+1=5 Punkte)

Betrachten Sie ein endliches Ein-Perioden-Modell $\mathcal{M}$ mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $D = 1$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_1 = 2^\Omega$, $S_t^0 = 1$ für $t = 0, 1$ und

$$S_0^1 = 12,\ S_1^1(\omega_1) = 15,\ S_1^1(\omega_2) = 9,\ S_1^1(\omega_3) = 6$$

(a) Bestimmen Sie alle linearen Preissysteme in $\mathcal{M}$.

(b) Berechnen Sie $\mathcal{I}_\xi := \{\pi(\xi),\ \pi \text{ lineares Preissystem}\}$ für $\xi = \mathrm{Call}(7, 1, 1)$.

(c) Zeigen Sie, dass zu jedem $\xi \in L_0(\mathcal{F}_1)$ reelle Zahlen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ existieren mit

$$\xi = \alpha_0 S_1^0 + \alpha_1 S_1^1 + \alpha_2 \mathrm{Call}(7, 1, 1).$$

(d) Folgern Sie aus (b) und (c):

$$\xi \in L_0(\mathcal{F}_1) \setminus \mathcal{H} \iff \mathcal{I}_\xi \text{ ist ein offenes Intervall.}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie im Markt aus Aufgabe 1 die Menge $\mathcal{D}$ der replizierbaren Kontrakte, die Call(7,1,1) dominieren, d.h.,

$$\mathcal{D} = \{\eta \in \mathcal{H} \,|\, \forall \omega \in \Omega\ \ \eta(\omega) \geq \mathrm{Call}(7, 1, 1)(\omega)\}.$$

Für welches $\eta \in \mathcal{D}$ ist der Hedgingpreis $\widehat{\pi}(\eta)$ minimal?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^N;\ x = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n e_n,\ \lambda_n \geq 0,\ \sum_{n=1}^{N} \lambda_n = 1 \right\},$$

wobei e_n den n-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^N$ bezeichnet, konvex und kompakt ist.