Dr. Robert Knobloch
Christian Gärtner

Universität des Saarlandes, Wintersemester 2014/15

8. Dezember 2014

# Diskrete Finanzmathematik

## Blatt 4

### Aufgabe 1 (3 Punkte)

Es sei $\Omega$ ein endlicher Stichprobenraum und $\mathcal{F}$ eine $\sigma$-Algebra auf $\Omega$. Zeigen Sie, dass das Atomsystem von $\mathcal{F}$ eindeutig bestimmt ist.

### Aufgabe 2 (1+1+1=3 Punkte)

Es sei $\mathcal{M}$ ein endliches 1-Perioden-Modell mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $D = 1$, sowie $S_0^0 = 100$, $S_1^0 = 110$ und

$$S_0^1 = 80,\ S_1^1(\omega_1) = x,\ \ S_1^1(\omega_2) = 100.$$

Nehmen Sie desweiteren an, dass (LOP) erfüllt ist.

(a) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ ist der Markt vollständig?

(b) Für welche Werte von $x \in \mathbb{R}$ existieren äquivalente Martingalmaße? Welche?

(c) Es gibt Werte von $x$, für die der Markt vollständig ist, aber kein äquivalentes Martingalmaß besitzt. Warum ist dies kein Widerspruch zum zweiten Fundamentalsatz?

### Aufgabe 3 (2 Punkte)

Zeigen Sie: Falls in einem endlichen Markt $\mathcal{M}$ das Gesetz von der Eindeutigkeit des Preises (LOP) verletzt ist, so gibt es für alle replizierbaren Kontrakte $\xi \in \mathcal{H}$ und alle reellen Zahlen $v \in \mathbb{R}$ ein Portfolio $\varphi \in \mathcal{A}^{sf}$ mit $V_T(\varphi) = \xi$ und $V_0(\varphi) = v$.

### Aufgabe 4 (2+2=4 Punkte)

Zu einem Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_T)$ auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten in $\mathbb{R}^T$, $T \in \mathbb{N}$, definieren wir eine Familie von $\sigma$-Algebren durch

$$\mathcal{F}_t^X := \{\{\omega;\ (X_1, \ldots, X_t)(\omega) \in B\};\ B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}^t\}; \quad t = 1, \ldots, T.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $s \leq t$ gilt $\mathcal{F}_s^X \subset \mathcal{F}_t^X$.

(b) Ist $\Omega$ endlich, so ist $A$ ein Element des Atomssytems von $\mathcal{F}_t^X$ genau dann, wenn ein $\omega' \in \Omega$ existiert mit

$$A = \{\omega;\ X_s(\omega) = X_s(\omega') \text{ für alle } s = 1, \ldots, t\}.$$

*Hinweis: Verwenden Sie die Konstruktion des Atomsystems aus Lemma 3.1.2.*