

## Diskrete Finanzmathematik

### Blatt 5

#### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei  $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{F}, P, (S_t)_{t \in \{0,1,2\}}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,1,2\}}, \mathcal{A}^{sf})$  ein Markt mit zwei Anlagemöglichkeiten und 7 Zuständen,  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_7\}$ . Es sei  $S_t^0 = 100 + 5t$  für  $t = 0, 1, 2$  sowie

$$\begin{aligned} S_0^1 &= 100, \\ S_1^1(\omega_1) &= S_1^1(\omega_2) = S_1^1(\omega_3) = 110, S_1^1(\omega_4) = S_1^1(\omega_5) = S_1^1(\omega_6) = 90, S_1^1(\omega_7) = 63; \\ S_2^1(\omega_1) &= 120, S_2^1(\omega_2) = 110, \\ S_2^1(\omega_3) &= S_2^1(\omega_4) = 100, S_2^1(\omega_5) = 90, S_2^1(\omega_6) = 75, S_2^1(\omega_7) = 66. \end{aligned}$$

Es gelte  $P(\{\omega_n\}) > 0$  für alle  $n = 1, \dots, N$ . Ferner sei

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}, \mathcal{F}_1 = \{(S_1^1)^{-1}(B); B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}\}, \mathcal{F}_2 = 2^\Omega.$$

Zerlegen Sie  $\mathcal{M}$  in 1-Perioden-Untermmodelle und untersuchen Sie diese auf Arbitragefreiheit.

#### Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es sei  $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{F}, P, (S_t)_{t \in \{0,1,2\}}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0,1,2\}}, \mathcal{A}^{sf})$  ein Markt mit zwei Anlagemöglichkeiten und 4 Zuständen,  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_4\}$ . Es sei  $S_t^0 = 100$  für  $t = 0, 1, 2$  sowie

$$\begin{aligned} S_0^1 &= 100, \\ S_1^1(\omega_1) &= S_1^1(\omega_2) = 110, S_1^1(\omega_3) = S_1^1(\omega_4) = 90 \\ S_2^1(\omega_1) &= 120, S_2^1(\omega_2) = 100, \\ S_2^1(\omega_3) &= 100, S_2^1(\omega_4) = 80 \end{aligned}$$

Es gelte  $P(\{\omega_n\}) > 0$  für alle  $n = 1, \dots, N$ . Ferner sei

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\}, \mathcal{F}_1 = \{(S_1^1)^{-1}(B); B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}\}, \mathcal{F}_2 = 2^\Omega.$$

- (a) Bestimmen Sie ein äquivalentes Martingalmaß für  $\mathcal{M}$ .
- (b) Bestimmen Sie einen perfekten Hedge und den Hedgingpreis für eine asiatische Call-Option auf  $S^1$  mit Ausübungspreis 90, deren Auszahlung durch

$$\xi = \left( \frac{1}{3}(S_0^1 + S_1^1 + S_2^1) - 90 \right)^+$$

gegeben ist.

- (c) Bestimmen Sie einen perfekten Hedge und den Hedgingpreis für eine Floating-Strike Lookback Call-Option auf  $S^1$ , deren Auszahlung durch

$$\eta = \left( S_2^1 - \min_{t=0,1,2} S_t^1 \right)$$

gegeben ist.