Dr. Robert Knobloch
Christian Gärtner

Universität des Saarlandes, Wintersemester 2014/15
19. Januar 2015

Diskrete Finanzmathematik

Blatt 6

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t=0,..,T}$ und zugehörigem Atomsystem $(\mathcal{P}_t)_{t=0,..,T}$. Zeigen Sie, dass für alle $\eta, \xi \in L_0(\mathcal{F}_T)$ und $0 \leq t \leq T$ die folgenden Aussagen gelten:

(a) $E^Q[\xi + \eta|\mathcal{F}_t] = E^Q[\xi|\mathcal{F}_t] + E^Q[\eta|\mathcal{F}_t]$.

(b) Für $t < T$, $E^Q[\xi|\mathcal{F}_t] = E^Q[E^Q[\xi|\mathcal{F}_{t+1}]|\mathcal{F}_t]$.

(c) Falls η $\mathcal{F}_t$-messbar ist, gilt $E^Q[\eta\,\xi|\mathcal{F}_t] = \eta E^Q[\xi|\mathcal{F}_t]$.

(d) Aus $\eta \leq \xi$ folgt $E^Q[\eta|\mathcal{F}_t] \leq E^Q[\xi|\mathcal{F}_t]$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, Q)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t=0,..,T}$ und zugehörigem Atomsystem $(\mathcal{P}_t)_{t=0,..,T}$. Zeigen Sie, dass für alle $\eta, \xi \in L_0(\mathcal{F}_T)$ und $0 \leq t \leq T$ die folgende Aussage gilt: Falls η $\mathcal{F}_t$-messbar ist, so ist

$$E^Q[|\xi - E^Q[\xi|\mathcal{F}_t]|^2] \leq E^Q[|\xi - \eta|^2]$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Es sei $\mathcal{M} = (\Omega, \mathcal{F}, P, (S_t)_{t\in\{0,1,2\}}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\{0,1,2\}}, \mathcal{A}^{sf})$ ein Markt mit zwei Anlagemöglichkeiten und 5 Zuständen, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_5\}$. Es sei $S_t^0 = 1$ für $t = 0, 1, 2$ sowie

$$\begin{aligned}
&S_0^1 = 10, S_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_2) = 11,\\
&S_1^1(\omega_3) = S_1^1(\omega_4) = S_1^1(\omega_5) = 9\\
&S_2^1(\omega_1) = 12,\ S_2^1(\omega_2) = S_2^1(\omega_3) = 10,\\
&S_2^1(\omega_4) = 9,\ S_2^1(\omega_5) = 8
\end{aligned}$$

Es gelte $P(\{\omega_n\}) > 0$ für alle $n = 1, \ldots, N$. Ferner sei

$$\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \emptyset\},\ \mathcal{F}_1 = \{(S_1^1)^{-1}(B);\ B \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}\},\ \mathcal{F}_2 = 2^\Omega.$$

(a) Zeigen Sie, dass ein äquivalentes Martingalmaß für dieses Modell durch $Q : 2^\Omega \to [0, 1]$ mit $Q(\{\omega_1\}) = Q(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4}$, $Q(\{\omega_3\}) = \frac{1}{12}$ und $Q(\{\omega_4\}) = \frac{1}{3}$ gegeben ist.

Bitte wenden

(b) Bestimmen sie den fairen Wertprozess $V_t^{\xi,Q}$ für $t = 0, 1, 2$ und den Kontrakt $\xi = 2Call(9, 2, 1) - 3Put(10, 2, 1)$.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass die σ-Algebren $\mathcal{F}_t$ aus Kapitel 4.1 der Vorlesung äquivalent über

$$\mathcal{F}_t = \{(S_1, \ldots, S_t)^{-1}(A);\ A \text{ Borelmenge in } \mathbb{R}^t\}$$

definiert werden können.

Bitte denken Sie daran, dass die Übung am 27.1.15 entfällt und auf den 3.2.15 verschoben wird.