Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
23. Oktober 2014

Stochastik II

1. Übung

Allen Aufgaben liegt ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ zugrunde.

Aufgabe 1 (2 Punkte)
Es sei $A \in \mathscr{F}$ ein Ereignis mit $P(A) > 0$. Außerdem sei ξ eine (relle) Zufallsvariable so, dass $\mathbb{1}_A \xi$ P-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass ξ $P(\cdot|A)$-integrierbar ist und dass

$$\int_A \xi \mathrm{d}P = P(A) \int_\Omega \xi \mathrm{d}P(\cdot|A)$$

gilt.

Aufgabe 2 (2+2+1 Punkte)
Es seien $\Omega = [0, 1)$, $\mathscr{F}$ die σ-Algebra der Borelmengen des Intervalls $[0, 1)$ und P das Lebesgue-Maß über $[0, 1)$. Weiterhin seien $\mathscr{G}_1$ die σ-Algebra, die von den Intervallen

$$[0, 1/4),\ [1/4, 3/4),\ [3/4, 1)$$

erzeugt wird, sowie $\mathscr{G}_2$ die σ-Algebra, welche von den Intervallen

$$[0, 1/8),\ [1/8, 1/4),\ [1/4, 1/2),\ [1/2, 3/4),\ [3/4, 7/8),\ [7/8, 1)$$

erzeugt wird. Bestimmen Sie für die durch

$$\forall\ \omega \in \Omega :\ \xi(\omega) = \omega^2$$

beschriebene Zufallsvariable ξ

(i) die bedingte Erwartung $E(\xi|\mathscr{G}_1)$,

(ii) die bedingte Erwartung $\eta := E(\xi|\mathscr{G}_2)$,

(iii) die bedingte Erwartung $E(\eta|\mathscr{G}_1)$.

Aufgabe 3 (4+4+3 Punkte)
Es sei $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$, $n \in \mathbb{N}$, eine $(n+1)$-variate normalverteilte Zufallsvariable, wobei die $\eta_1, \ldots, \eta_n$ unabhängig seien. Bestimmen Sie

(i) die bedingte Erwartung $E(\xi|\eta_1, \ldots, \eta_n)$.

(ii) die *bedingte charakteristische Funktion* $E(e^{i\lambda\xi}|\eta_1, \ldots, \eta_n)$ an einer festen Stelle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) die *bedingte Varianz* $E\left((\xi - E(\xi|\eta_1, \ldots, \eta_n))^2|\eta_1, \ldots, \eta_n\right)$.

Hinweise: Verwenden Sie für (i) und (ii) die Zufallsvariable

$$(\xi - E(\xi)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{Cov}(\xi, \eta_k)}{\mathrm{Var}(\eta_k)}(\eta_k - E(\eta_k))$$

und zeigen Sie, dass diese unabhängig von $\eta - E(\eta)$ ist, wobei $\eta := (\eta_1, \ldots, \eta_n)^T$. Verwenden Sie (i) und (ii), um (iii) zu lösen.