Stochastik II

10. Übung

Allen Aufgaben liegt ein filtrierter W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ zugrunde, wobei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$.

Aufgabe 1 (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Filtrierung $\tilde{\mathbb{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_t)_{t \in [0, \infty)}$, welche durch

$$\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_{t+} \cup \mathcal{N}),$$

wobei $\mathcal{N} := \{A \in \mathcal{F} : P(A) = 0\}$, gegeben ist, die üblichen Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 2 (3+4 Punkte) Es sei $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ein stochastischer Prozess mit $X_0 = 0$, welcher stetige Pfade hat.

- (i) Zeigen Sie, dass X genau dann eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{F}$ ist, wenn X $\mathbb{F}$ -adaptiert ist und

$$E\left(e^{iu(X_t - X_s)} \middle| \mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{1}{2}u^2(t-s)}$$

für alle $0 \leq s < t$ und $u \in \mathbb{R}$ gilt.

- (ii) Zeigen Sie, dass X genau dann eine Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{F}^X$ ist, wenn X ein Gauß-Prozess mit $E(X_t) = 0$ und $\text{Cov}(X_t, X_s) = t \wedge s$ für $s, t \in \mathbb{R}_+$ ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte) Seien $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine $\mathbb{F}$ -Brownsche Bewegung und $a, b > 0$. Wir betrachten den Gauß-Prozess $Y = (Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, welcher durch

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ : Y_t := \sqrt{a}e^{-bt}X_{e^{2bt}}$$

gegeben ist. Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y_t und die Kovarianz von (Y_t, Y_s) für $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Aufgabe 4 (2+3 Punkte) Es sei $X := (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine $\mathbb{F}$ -Brownsche Bewegung und τ sei eine Stoppzeit, so dass eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $(|X_{t \wedge \tau}|)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist durch eine P -integrierbare Zufallsvariable beschränkt,
(ii) $E(\tau) < \infty$.

Zeigen Sie, dass $E(X_\tau) = 0$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie für (ii) die Zufallsvariable

$$\sum_{k=1}^{\lceil \tau \rceil} \max_{t \in [0, 1]} |X_{k+t} - X_k|.$$