Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
22. Januar 2015

Stochastik II

12. Übung

Aufgabe 1 (1+2 Punkte) Sei τ eine $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-Stoppzeit, wobei $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$.

(i) Zeigen Sie, dass $\sigma - \tau$ eine $(\mathscr{F}_{t+\tau})_{t\in\mathbb{R}_+}$-Stoppzeit ist, wenn $\sigma \geq \tau$ eine $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-Stoppzeit ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $\varrho + \tau$ eine $(\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-Stoppzeit ist, wenn ϱ eine $(\mathscr{F}_{\tau+t})_{t\in\mathbb{R}_+}$-Stoppzeit ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte) *Zum Beweis von Lemma 12.7.* Sei $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}_+$, so dass $\frac{\gamma_n}{n} \to 1$ für $n \to \infty$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{0\leq k\leq n} \left| \frac{\gamma_k - k}{n} \right| = 0.$$

Aufgabe 3 (3+4 Punkte) Es sei $Y = (Y_t)_{t\in[0,T]}$ definiert durch

$$Y_t := W_t - \frac{t}{T} W_T,$$

wobei $(W_t)_{t\in[0,T]}$ eine Brownsche Bewegung sei.

(i) In welchem Verhältnis steht die Verteilung von Y zur Verteilung der Brownschen Brücke $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$, $T > 0$, welche in Aufgabe 2 des 11. Übungsblattes definiert wurde?

(ii) Bestimmen Sie die quadratische Variation von Y.

Aufgabe 4 (5+1 Punkte) Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter reellwertiger Zufallsvariablen mit $E(\xi_1) = 0$ und $E(\xi_1^2) = \sigma^2 \in (0,\infty)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definieren wir

$$S_k := \sum_{n=1}^{k} \xi_n.$$

Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(S_{k-1} + S_k) \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}\sigma} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} S_k$$

für $n \to \infty$ in Verteilung gegen eine $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3}\right)$-verteilte Zufallsvariable konvergieren.