Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
29. Januar 2015

Stochastik II

13. Übung

Den Aufgaben 1, 3 und 4 liegt ein W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ zugrunde.

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein (homogener) Poisson-Prozess bzgl einer Filtrierung $\mathbb{F}$ mit Intensität $\lambda > 0$. Bestimmen Sie die quadratische Variation von N.

Aufgabe 2 (5 Punkte) *Zu Satz 13.2 (i).* Zeigen Sie, dass ein W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$, eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ und ein $\mathbb{R}^D$-wertiger stochastischer Prozess $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ existieren, so dass W eine D-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl. $\mathbb{F}$ ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte) *Zu Satz 13.2 (ii).* Sei $W = (W_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine D-dimensionale Brownsche Bewegung bzgl einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$. Zeigen Sie, dass die Komponenten $W^{(1)}, \dots, W^{(D)}$ unabhängig sind und eindimensionale Brownsche Bewegungen bzgl. $\mathbb{F}$ sind.

Aufgabe 4 (5 Punkte) *Zu Lemma 13.6.* Es seien $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ und $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$ Messräume. Zudem sei $F : (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B})$ eine messbare Funktion und $\mathscr{G}$ sei eine Unter-σ-Algebra von $\mathscr{F}$. Außerdem seien Y eine $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$-wertige und X eine $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$-wertige Zufallsvariable, wobei Y $\mathscr{G}$-messbar und X unabhängig von $\mathscr{G}$ seien. Zeigen Sie, dass

$$E\left(F(Y, X)|\mathscr{G}\right) = \int_{\Omega_2} F(Y, x) P_X(\mathrm{d}x)$$

P-f.s. gilt, wenn $E\left(|F(Y, X)|\right) < \infty$.