Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
30. Oktober 2014

Stochastik II

2. Übung

Aufgabe 1 (3+2 Punkte) *Zu Satz 1.11.* Sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{L}^1(P)$ und sei $\mathscr{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathscr{F}$.

(i) Beweisen Sie den Satz von der monotonen Konvergenz (Satz von Beppo Levi) für bedingte Erwartungen: Sind die Folge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtfallend, $\xi_1 \geq 0$ und $\sup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n \in \mathscr{L}^1(P)$, so gilt

$$E\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n \middle| \mathscr{G}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} E\left(\xi_n \middle| \mathscr{G}\right) \qquad P\text{-f.s..}$$

(ii) Beweisen Sie das Lemma von Fatou für bedingte Erwartungen: Sind $\xi_n \geq 0$ und $\liminf_{n\to\infty} \xi_n \in \mathscr{L}^1(P)$, so gilt

$$E\left(\liminf_{n\to\infty} \xi_n \middle| \mathscr{G}\right) \leq \liminf_{n\to\infty} E\left(\xi_n \middle| \mathscr{G}\right) \qquad P\text{-f.s..}$$

Aufgabe 2 (5+2 Punkte) *Zu Lemma 2.3.* Sei $X := (X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein stochastischer Prozess mit Zustandsraum $(E, \mathscr{E})$.

(i) Zeigen Sie, dass X in jeder der beiden folgenden Situationen messbar ist:

a) $\mathcal{T}$ ist höchstens abzählbar,

b) $\mathcal{T} = [0,\infty)$, $(E,\mathcal{E}) = (\mathbb{R}^D, \mathscr{B}^D)$ und X hat rechtsstetige oder linksstetige Pfade, wobei $\mathscr{B}^D$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^D$ bezeichnet.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für einen stochastischen Prozess an, welcher nicht messbar ist.

Aufgabe 3 (4+2 Punkte) *Zu Satz 2.9, Schritt 3.* Es sei $Y_k := \sum_{j=1}^k Z_j$, $k \in \mathbb{N}$, wobei $(Z_j)_{j=1}^k$ eine unabhängige Familie von exponential(λ)-verteilten Zufallsvartiablen mit $\lambda > 0$ ist.

(i) Zeigen Sie, dass Y_k Γ-verteilt mit Parametern (k,λ) ist, d.h. die Dichte f_k von Y_k ist gegeben durch

$$f_k(u) = \frac{(\lambda u)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(u)$$

für alle $u \in \mathbb{R}$.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$P\left(\{Y_k > \vartheta\}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda\vartheta)^j}{j!} e^{-\lambda\vartheta}$$

für alle $\vartheta > 0$.