Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
6. November 2014

Stochastik II

3. Übung

Aufgabe 1 (4+3 Punkte) Es bezeichne $\mathscr{B}$ die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}$.

(i) Zeigen sie, dass das Mengensystem

$$\mathscr{A} := \Big\{ \{x \in E^{[0,\infty)}; (x_{t_1}, \ldots, x_{t_n}) \in B\}; n \in \mathbb{N}, 0 \leq t_1 < \ldots < t_n, B \in \mathscr{B}^n \Big\}$$

eine Algebra ist und dass $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{B}^{[0,\infty)}$ gilt.

(ii) Es sei $A \in \mathscr{B}^{[0,\infty)}$. Zeigen Sie, dass eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[0,\infty)$ und eine Menge $B \in \mathscr{B}^{\mathbb{N}}$ existieren, so dass

$$A = \Big\{ x \in E^{[0,\infty)}; (x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots) \in B \Big\}$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Es seien $X := (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ und $Y := (Y_t)_{t\in[0,\infty)}$ reellwertige stochastische Prozesse mit P-f.s. rechtsstetigen Pfaden. Außerdem seien X und Y gleich bis auf Modifikation. Zeigen Sie, dass X und Y ununterscheidbar sind.

Aufgabe 3 (7 Punkte) Es sei $X := (X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein stochastischer Prozess und es sei $\mathbb{F}^X = (\mathscr{F}_t^X)_{t\in[0,\infty)}$ die von X erzeugte Filtrierung. Zeigen Sie, dass $X_t - X_s$ genau dann für alle $0 \leq s < t$ unabhängig von $\mathscr{F}_s^X$ ist, wenn X unabhängige Zuwächse hat, d.h. die Familie $(X_{t_k} - X_{t_{k-1}})_{k=1,\ldots,n}$, wobei $X_{t_0} := 0$, unabhängig für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_1 < \ldots < t_n \in [0,\infty)$ ist.