Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
13. November 2014

Stochastik II

4. Übung

Aufgabe 1 (4 Punkte) *Zu Bsp. 2.5 und Def. 2.10.* Sei $N = (N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ ein homogener Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass die Zeiten zwischen benachbarten Sprüngen von N unabhängig und $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilt sind, d.h.

$$t_n - t_{n-1} \overset{\text{u.i.v.}}{\sim} \mathrm{Exp}(\lambda)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei t_n die Zeit des n-ten Sprungs von N bezeichnet und $t_0 := 0$.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass die Eigenschaften in Def. 2.10 auch für die Zeiten $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelten.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, welcher nicht-fallend und integrierbar ist, genau dann eine Modifikation besitzt, welche P-f.s. rechtsstetig ist und linksseitige Grenzwerte besitzt, wenn die Abbildung $t \mapsto E(X_t)$ rechtsstetig ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Sei $\lambda : [0,\infty) \to (0,\infty)$ eine Funktion, welche $\int_s^t \lambda(u)\mathrm{d}u < \infty$ für alle $s, t \in [0,\infty)$ erfüllt. Sei

$$\{P_{t_1,\dots,t_n}; n \in \mathbb{N}, 0 \le t_1 < \ldots < t_n\}$$

eine Familie endlichdimensionaler Verteilungen, wobei $P_{t_1,\dots,t_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ ein W-Maß auf $(\mathbb{N}_0^n, 2^{\mathbb{N}_0^n})$ ist, welches für alle $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$ gegeben ist durch

$$P_{t_1,\dots,t_n}(\{k_1,\dots,k_n\}) = \begin{cases} \prod_{j=1}^n \frac{e^{-\lambda_j}\lambda_j^{k_j-k_{j-1}}}{(k_j-k_{j-1})!}, & k_1 \le \ldots \le k_n \\ 0, & \text{andernfalls,} \end{cases}$$

wobei $k_0 := 0$, $t_0 := 0$ und $\lambda_j := \int_{t_{j-1}}^{t_j} \lambda(u)\mathrm{d}u$ für $j = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass diese Familie endlichdimensionaler Verteilungen konsistent ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte) *Zu Lemma 3.4.* Sei

$$\mathcal{P} := \{P_{t_1,\dots,t_n}; n \in \mathbb{N}, 0 \le t_1 < \ldots < t_n\}$$

eine Familie endlichdimensionaler Verteilungen. Zeigen Sie, dass diese Familie genau dann konsistent ist, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$, $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ und $j = 1, \dots, n$ folgende Gleichheit gilt:

$$\varphi_{P_{t_1,\dots,t_n}}(u_1,\dots,u_{j-1},0,u_{j+1},\dots,u_{n+1}) = \varphi_{P_{t_1,\dots,t_{j-1},t_{j+1},\dots,t_n}}(u_1,\dots,u_{j-1},u_{j+1},\dots,u_{n+1}).$$

Hinweis: Es ist hilfreich, für $P_{t_1,\dots,t_n} \in \mathcal{P}$ ein Maß $\tilde{P}$ auf $(\mathbb{R}^{n-1}, \mathscr{B}^{n-1})$ durch

$$\tilde{P}(A_1,\dots,A_{j-1},A_{j+1},\dots,A_n) = P_{t_1,\dots,t_n}(A_1,\dots,A_{i-1},\mathbb{R},A_{i+1},\dots,A_n)$$

für alle $A_1,\dots,A_n \in \mathscr{B}$ zu definieren