Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
20. November 2014

Stochastik II

5. Übung

Aufgabe 1 (7 Punkte) *Zu Def. 2.10.* Sei $\lambda : [0,\infty) \to (0,\infty)$ eine Funktion mit $\int_s^t \lambda(u)\mathrm{d}u < \infty$ für alle $s,t \in [0,\infty)$. Begründen Sie, warum die Familie endlichdimensionaler Verteilungen in Aufg. 3 des 4. Übungsblattes einen stochastischen Prozess erzeugt und zeigen Sie, dass dieser Prozess eine Modifikation $N := (N_t)_{t\in[0,\infty)}$ mit folgenden Eigenschaften besitzt:

- N hat rechtsstetige Pfade mit linksseitigem Grenzwert,
- $N_0 = 0$
- $N_t - N_s$ ist Poisson($\int_s^t \lambda(u)\mathrm{d}u$)-verteilt für alle $0 \le s < t$,
- $N_t - N_s$ ist unabhängig von $\mathscr{F}_s^N$ für alle $0 \le s < t$.

Aufgabe 2 (3 Punkte) *Zu Lemma. 4.3.* Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein P-integrierbarer stochastischer Prozess, welcher adaptiert an eine Filtrierung $\mathbb{F} := (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Zeigen Sie, dass X genau dann ein $\mathbb{F}$-Martingal ist, wenn

$$P(X_{n+1}|\mathscr{F}_n) = X_n$$

P-f.s. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte) Sei $W = (W_t)_{t\in[0,\infty}$ eine Brownsche Bewegung auf einem filtrierten W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$.

(i) Zeigen Sie, dass $(W_t^2 - t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$ ist.

(ii) Bestimmen Sie $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ so, dass der Prozess $(\mathcal{E}_t^{(\mu,\sigma^2)})_{t\in[0,\infty)}$, mit

$$\mathcal{E}_t^{(\mu,\sigma^2)} := \exp\left(W_t - (\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)t\right),$$

ein Martingal bzgl. $\mathbb{F}$ ist.

Aufgabe 4 (1+3 Punkte)

(i) Seien $\mathcal{T} \subset [0,\infty)$, $\mathbb{F} := (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$ eine Filtrierung und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass wenn $(X_t)_{t\in\mathcal{T}}$ und $(Y_t)_{t\in\mathcal{T}}$ $\mathbb{F}$-Martingale sind, auch $(\alpha X_t + \beta Y_t)_{t\in\mathcal{T}}$ ein $\mathbb{F}$-Martingal ist.

(ii) Seien $\gamma \in \mathbb{R}$ und seien X_1 und Y_1 unabhängige Zufallsvariablen mit

$$P(X_1 = \gamma) = P(X_1 = -\gamma) = P(Y_1 = \gamma) = P(Y_1 = -\gamma) = \frac{1}{2}.$$

Außerdem definieren wir eine Zufallsvariable Z durch

$$Z := \begin{cases} 1, & X_1 + Y_1 = 0 \\ -1, & X_1 + Y_1 \neq 0 \end{cases}$$

sowie Zufallsvariablen $X_2 := X_1 + Z$ und $Y_2 := Y_1 + Z$. Untersuchen Sie, ob die Prozesse $X := (X_n)_{n=1,2}$, $Y := (Y_n)_{n=1,2}$ und $X+Y := (X_n+Y_n)_{n=1,2}$ Martingale bzgl. ihrer jeweiligen natürlichen Filtrierung sind. Inwiefern widerspricht dieses Beispiel nicht (i)?