Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
27. November 2014

Stochastik II

6. Übung

Allen Aufgaben liegt ein filtrierter W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ zugrunde, wobei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion.

(i) Seien X eine integrierbare Zufallsvariable, so dass $f(X) \in \mathscr{L}^1(P)$, und $\mathscr{G}$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathscr{F}$. Zeigen Sie, dass
$$E(f(X)|\mathscr{G}) \geq f\left(E(X|\mathscr{G})\right)$$
P-f.s. gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $(f(X_t))_{t\in[0,\infty)}$ ein Submartingal ist, wenn

a) $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal, mit $f(X_t) \in \mathscr{L}^1(P)$ für alle $t \in [0,\infty)$, ist.

b) $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ ein Submartingal, mit $f(X_t) \in \mathscr{L}^1(P)$ für alle $t \in [0,\infty)$, ist und f zusätzlich nichtfallend ist.

Hinweis: Jede konvexe Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lässt sich ausdrücken als Supremum aller linearen Funktionen, die vollständig unterhalb des Graphen von f verlaufen.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zufallsvariablen, mit $X_k \in \mathscr{L}^2(P)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, und sei $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $M_n := \sum_{k=1}^n X_k$, ein Martingal. Zeigen Sie, dass $E(X_k X_m) = 0$ für alle $k \neq m$ gilt.

Aufgabe 3 (2 Punkte) Sei J eine beliebige Indexmenge und sei $X := (X_j)_{j\in J} \subset \mathscr{L}^1(P)$ eine Familie von Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass X gleichgradig integrierbar ist, wenn eine messbare Funktion $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ existiert, so dass
$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{t} = \infty \qquad \text{und} \qquad \sup_{j\in J} E(f(|X_j|)) < \infty.$$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen reellen Zufallsvariablen mit $E(X_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$, und $\sum_{k\in\mathbb{N}} E\left(X_k^2\right) < \infty$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei außerdem $M_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen Sie, dass die Folge $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ P-f.s. und in $\mathscr{L}^1(P)$ konvergiert.

Aufgabe 5 (4+1 Punkte) Seien $W = (W_t)_{t\in[0,\infty)}$ eine Brownsche Bewegung und
$$\forall\, t \in [0,\infty) : \quad \mathcal{E}_t := \exp\left(W_t - \frac{t}{2}\right).$$
Untersuchen Sie, ob der stochastische Prozess $\mathcal{E} := (\mathcal{E}_t)_{t\in[0,\infty)}$ für $t \to \infty$ P-f.s. bzw. in $\mathscr{L}^1(P)$ konvergiert und berechnen Sie ggf. den entsprechenden Grenzwert.