

Stochastik II

7. Übung

Allen Aufgaben liegt ein filtrierter W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ zugrunde, wobei $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$.

Aufgabe 1 (6 Punkte) Es sei $X := (X_t)_{t \in [0, \infty)}$ ein $\mathbb{F}$ -adaptierter und integrierbarer stochastischer Prozess. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

(i) X ist ein Supermartingal.

(ii) Für alle $s, t \in [0, \infty)$ und alle $A \in \mathcal{F}_s$ gilt:

$$E^{P(\cdot|A)}(X_{s+t}) \leq E^{P(\cdot|A)}(X_s).$$

(iii) Für alle $s, t \in [0, \infty)$ und alle $A \in \mathcal{F}_s$ gilt:

$$\int_A X_{s+t} dP \leq \int_A X_s dP.$$

(iv) Für alle $s, t \in [0, \infty)$ und jede beschränkte und $\mathcal{F}_s$ -messbare Zufallsvariable Y gilt:

$$E(Y \cdot X_{s+t}) \leq E(Y \cdot X_s).$$

Aufgabe 2 (2 Punkte) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge reeller Zufallsvariablen und sei $\mathcal{H} := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \sigma(X_k, k \geq n)$. Zeigen Sie, dass

$$P \left(\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n X_k \text{ existiert} \right\} \right) \in \{0, 1\}.$$

Aufgabe 3 (4+1 Punkte)

(i) Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein Submartingal und sei σ eine Stoppzeit mit $E(\sigma) < \infty$. Außerdem existiere eine Konstante $C > 0$, so dass

$$|X_{n+1} - X_n| \leq C$$

P -f.s. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$E(X_\sigma) \geq E(X_0).$$

(ii) Sei $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(\{\xi_n = -1\}) = P(\{\xi_n = 1\}) = 1/2$. Außerdem seien $S_n := \sum_{k=1}^n \xi_k$ und $\tau := \inf\{n \in \mathbb{N} : S_n = 1\}$. Zeigen Sie, dass $E(\tau) = \infty$.

Aufgabe 4 (5 Punkte) Es seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Unter- σ -Algebren von $\mathcal{F}$ und es sei X eine P -integrierbare Zufallsvariable, so dass $\mathcal{H}$ unabhängig von $\sigma(\sigma(X) \cup \mathcal{G})$ ist. Zeigen Sie, dass

$$E(X|\sigma(\mathcal{G} \cup \mathcal{H})) = E(X|\mathcal{G}) \quad P\text{-f.s.}$$

gilt.