Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Universität des Saarlandes, WiSe 2014/15
11. Dezember 2014

Stochastik II

8. Übung

Allen Aufgaben liegt ein filtrierter W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ zugrunde, wobei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$.

Aufgabe 1 (3+1 Punkte)

(i) Sei τ eine Stoppzeit. Zeigen Sie dass $\mathscr{F}_\tau$ eine σ-Algebra ist und dass τ messbar bzgl. $\mathscr{F}_\tau$ ist.

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes $t \in [0, \infty]$ die Gleichheit $\mathscr{F}_\tau = \mathscr{F}_t$ für die Stoppzeit $\tau :\equiv t$ gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Es seien τ eine optionale Zeit und $\mathscr{G}$ die σ-Algebra bestehend aus allen Ereignissen $A \in \mathscr{F}$, welche $A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+}$ für alle $t \geq 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass $\mathscr{G} = \mathscr{F}_{\tau+}$ gilt.

Aufgabe 3 (4+2 Punkte) Es sei $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge optionaler Zeiten.

(i) Zeigen Sie, dass
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n, \qquad \inf_{n \in \mathbb{N}} \tau_n, \qquad \limsup_{n \to \infty} \tau_n, \qquad \liminf_{n \to \infty} \tau_n$$
optionale Zeiten sind.

(ii) Zeigen Sie, dass $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ und $\tau_1 \wedge \tau_2$ Stoppzeiten sind, wenn alle τ_n, $n \in \mathbb{N}$, Stoppzeiten sind.

Aufgabe 4 (1+2+2 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass jede konstante $\mathbb{R}_+$-wertige Zufallsvariable eine Stoppzeit ist.

(ii) Seien σ, τ Stoppzeiten. Zeigen Sie, dass $\sigma + \tau$ eine Stoppzeit ist.

(iii) Seien $\sigma > 0$ eine Stoppzeit und τ eine optionale Zeit. Zeigen Sie, dass $\sigma + \tau$ eine Stoppzeit ist.