Prof. Dr. Christian Bender
Dr. Robert Knobloch

Stochastik II

9. Übung

Allen Aufgaben liegt ein filtrierter W-Raum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ zugrunde, wobei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$.

Aufgabe 1 (2+2+2 Punkte) Seien σ und τ Stoppzeiten.

(i) Zeigen Sie, dass $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass

$$\{\sigma < \tau\},\ \{\tau < \sigma\},\ \{\sigma \leq \tau\},\ \{\tau \leq \sigma\},\ \{\sigma = \tau\}$$

alle in $\mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$ liegen.

(iii) Sei Y eine $\mathbb{R}^D$-wertige $\mathscr{F}_\sigma$-messbare Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\mathbb{1}_{\{\sigma\leq\tau\}}Y$ $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$-messbar ist

Aufgabe 2 (3 Punkte) *Zu Bsp. 8.14.* Es gelten die Notationen und Annahmen von Bsp. 8.14, bis auf die Annahme der Beschränktheit von τ. Zeigen Sie, dass $(N_t^{(\varphi,\sigma,\tau)})_{t\in[0,\infty)}$ ein Martingal ist.

Hinweis: Sie sollen nicht die Rechnungen aus Bsp. 8.14 modifizieren. Wenden Sie an, dass Sie die Aussage von Bsp. 8.14 zur Verfügung haben.

Aufgabe 3 (3 Punkte) *Zu Lemma. 9.7.* Sei $f : [0,\infty) \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$. Für alle $a < b \in \mathbb{Q}$ und alle beschränkten Mengen $I \subset [0,\infty) \cap \mathbb{Q}$ sei die Funktion f eingeschränkt auf I beschränkt und die Anzahl $U([a,b], I, f)$ der Upcrossings sei endlich. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\substack{s\downarrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} f(s) \qquad \text{und} \qquad \lim_{\substack{s\uparrow t\\ s\in\mathbb{Q}}} f(s)$$

für alle $t \in [0,\infty)$ existieren.

Definition Ein $(E, \mathscr{E})$-wertiger stochastischer Prozess X heißt *progressiv messbar* (bzgl. $\mathbb{F}$), wenn für jedes $t \in [0,\infty)$ die Abbildung $[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \mapsto X_s(\omega) \in E$ $\mathscr{B}([0,t]) \otimes \mathscr{F}_t \,/\, \mathscr{E}$-messbar ist.

Aufgabe 4 (2 Punkte) Sei X ein $\mathbb{R}^D$-wertiger stochastischer Prozess, welcher adaptiert an $\mathbb{F}$ ist und linksstetige Pfade hat. Zeigen Sie, dass X progressiv messbar bzgl. $\mathbb{F}$ ist.

Aufgabe 5 (1+3 Punkte) Sei X ein progressiv messbarer Prozess und sei τ eine Stoppzeit.

(i) Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}$ $\mathscr{F}_\tau$-messbar ist.

(ii) Zeigen Sie, dass der gestoppte Prozess $(X_{\tau\wedge t})_{t\in[0,\infty)}$ progressiv messbar ist.