

Analysis I

2. Übung

Aufgabe 1 (5 Punkte) Zeigen Sie: Sei $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper, dann gelten:

- i) $\forall a, b \in K$: Entweder $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.
- ii) $\forall a, b, c \in K$: $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$.
- iii) $\forall a, b, c, d \in K$: $a < b$ und $c \leq d \Rightarrow a + c < b + d$.
- iv) $\forall a, b \in K$: $a < b \Rightarrow -a > -b$.
- v) $\forall a \in K$: $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$.
- vi) $\forall a, b \in K$: $0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt:

- i) $x \in I_n := (0, \frac{1}{n^2}]$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- ii) $x \in J_n := [0, \frac{1}{n^2})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- iii) $x \in H_n := (-\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2})$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Seien $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $I_n = [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $J_n = [p_n, q_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zwei Intervallschachtelungen in \mathbb{R} . Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$\forall n \in \mathbb{N} : (x \in I_n) \wedge (y \in J_n).$$

Zeigen Sie, dass gilt

$$x = y \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (a_n \leq q_n) \wedge (p_n \leq b_n).$$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Betrachten Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ das abgeschlossene Intervall $I_n = [a_n, b_n]$ in \mathbb{R} mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Zeigen Sie, dass $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung definiert.

Hinweis: Wenden Sie auf die Terme

$$\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \quad \text{und} \quad \left(1 + \frac{1}{(n+1)^2 - 1}\right)^{n+1}$$

die Bernoulli-Ungleichung an.