Universität des Saarlandes
Christian Bender
Christoph Eisinger

9. November 2011

Zinsmarktmodelle

3. Übungsblatt

Aufgabe 1. (3 + 5 = 8 Punkte)

a) Sei (X, Y) ein Zufallsvektor auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit gemeinsamer Dichte $f_{X,Y}$ und derart, dass $\mathrm{E}[X^2] < \infty$. Die bedingte Dichte von X unter der Bedingung Y ist gegeben durch

$$f_{X|Y}(x, y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

wobei $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\,\mathrm{d}x$ die Randdichte von Y ist. Definiere nun

$$\eta(y) := \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Zeigen Sie, dass $\eta(Y) = \mathrm{E}[X|\sigma(Y)]$.

Hinweis: *Sie dürfen ohne Beweis benutzen, dass sich jedes $\tilde{Y} \in L^2(\Omega, \sigma(Y), P)$ in der Form $\tilde{Y} = g(Y)$ mit einer messbaren Funktion $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ darstellen lässt.*

b) Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Partition $\mathcal{A} = (A_j)_{j=1,\dots,n}$ von Ω, d.h. $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$ und $A_i \cap A_j = \{\}$ für $i \neq j$. Es seien $\mathcal{G} := \sigma(\mathcal{A})$ und $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{A_j} \mathrm{E}_{P(\cdot|A_j)}[X].$$

Aufgabe 2. (5 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P) := ([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), \lambda|_{[0,1]})$, wobei $\lambda|_{[0,1]}$ das auf $[0, 1]$ eingeschränkte Lebesguemaß ist. Gegeben seien $Y : \Omega \to \mathbb{R}$; $Y(x) = x(1 - x)$ sowie $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{E}(X|\sigma(Y))(x) = \frac{1}{2}(X(x) + X(1 - x))$$

für $x \in \Omega$.

Hinweis: *Zeigen Sie, dass $f : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ genau dann $\sigma(Y)$-messbar ist, wenn $f(x) = f(1 - x)$.*

Abgabe: Mittwoch, 16. November, 10 Uhr, in Zimmer 213, Geb. E2.4