

## Zinsmarktmodelle

### 5. Übungsblatt

#### Aufgabe 1. (2+4=6 Punkte)

- a) Zeigen Sie Folgerung 1.2.12: Der Forward-LIBOR  $F(t, S, T)$ ,  $0 \leq t \leq S$ , mit Expiry  $S$  und Maturity  $T$  ist ein Martingal unter dem  $T$ -Vorwärtsmaß, d.h. unter dem Maß, das durch  $B(t, T)$  als Numeraire induziert wird.
- b) Sei  $\xi$  ein Deflator mit  $\lambda, r$  wie in Abschnitt 1.2. Unter der Annahme, dass  $\lambda$  beschränkt ist, ist  $M(t) = \exp \left\{ \int_0^t \langle \lambda(u), dW(u) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t |\lambda(u)|^2 du \right\}$  ein Martingal. Für festes  $T > 0$  sei ein Maß  $Q$  auf  $\mathcal{F}$  definiert durch

$$\frac{dQ}{dP} = M(T).$$

Zeigen Sie, dass  $\exp\{-\int_0^T r(u)du\}B(t, T)$  ein  $Q$ -Martingal ist und sich das Preissystem durch  $P_\xi(t, T, H) = E^Q[\exp\{-\int_t^T r(u)du\}H|\mathcal{F}_t]$  darstellen lässt.

#### Aufgabe 2. (4 Punkte)

Sei  $W_t$  eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass  $W_t^2 - t$  ein Martingal ist.

**Abgabe:** Mittwoch, 30. November, 10 Uhr, in Zimmer 213, Geb. E2.4