

Zinsmarktmodelle

8. Übungsblatt

Zeigen Sie, dass im Vasicek-Modell folgende Aussagen gelten:

Aufgabe 1. (3 + 4 = 7 Punkte)

a) $\int_s^t r(u) \, du = r(s)b(s, t) - \vartheta b(s, t) + \vartheta(t - s) + \eta \int_s^t b(u, t) \, d\tilde{W}(u)$, wobei
 $b(s, t) := \frac{1}{k} (1 - e^{-k(t-s)})$.

b) $Law^Q \left(\int_s^t r(u) \, du - \mathbf{E}^Q \left[\int_s^t r(u) \, du \middle| \mathcal{F}_s \right] \middle| \mathcal{F}_s \right)$
 $= \mathcal{N} \left(0, \eta^2 \left(\frac{1}{k^2} b(s, t) + \frac{1}{k^2} (t - s) - \frac{1}{2k} b(s, t)^2 \right) \right)$.

Aufgabe 2. (3 + 4 = 7 Punkte)

a) $B(t, T) = \mathbf{E}^Q \left[e^{-\int_t^T r(u) \, du} \middle| \mathcal{F}_t \right] = a(t, T) e^{-b(t, T)r(t)}$, wobei
 $a(t, T) := \exp \left\{ \left(\vartheta - \frac{\eta^2}{2k^2} \right) (b(t, T) - T + t) - \frac{\eta^2}{4k} b(t, T)^2 \right\}$.

b) $M(t, T) := \mathbf{E}^Q \left[e^{-\int_0^T r(u) \, du} \middle| \mathcal{F}_t \right]$
 $= B(0, T) \exp \left\{ -\eta \int_0^t b(u, t) \, d\tilde{W}(u) - \frac{1}{2} \eta^2 \int_0^t b(u, t)^2 \, du \right\}$.

Abgabe: Mittwoch, 21. Dezember, 10 Uhr, in Zimmer 213, Geb. E2.4