

Zinsmarktmodelle

11. Übungsblatt

Aufgabe 1. (4+2+2=8 Punkte)

Seien $f, g \in L^2[0, T]$ deterministisch, $\rho \in [-1, 1]$.

a) Es seien W_1, W_2 unabhängige Brownsche Bewegungen. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{W}_1(t) := W_1(t); \quad \tilde{W}_2(t) := \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} W_2(t)$$

Brownsche Bewegungen sind mit $E[\tilde{W}_1(t)\tilde{W}_2(t)] = \rho t$.

b) Zeigen Sie, dass für $0 \leq s < t \leq T$

$$E \left[\int_s^t f(u) d\tilde{W}_1(u) \int_s^t g(u) d\tilde{W}_2(u) \right] = \rho E \left[\int_s^t f(u) dW_1(u) \int_s^t g(u) dW_1(u) \right].$$

c) Verwenden Sie die Itô-Isometrie, um zu zeigen, dass für $0 \leq s < t \leq T$

$$E \left[\int_s^t f(u) dW_1(u) \int_s^t g(u) dW_1(u) \right] = \int_s^t f(u)g(u)du.$$

Aufgabe 2. (6 Punkte)

Es sei r die Zinsrate im Zwei-Faktor Hull-White-Modell. Zeigen Sie: $r(t)$ ist bedingt auf $\mathcal{F}_s$ normalverteilt, und es gilt

$$\begin{aligned} E[r(t)|\mathcal{F}_s] &= y_1(s)e^{-a_1(t-s)} + y_2(s)e^{-a_2(t-s)} + \varphi(t), \\ Var[r(t)|\mathcal{F}_s] &= \frac{\eta_1^2}{2a_1}(1 - e^{-2a_1(t-s)}) + \frac{\eta_2^2}{2a_2}(1 - e^{-2a_2(t-s)}) \\ &\quad + 2\rho \frac{\eta_1\eta_2}{a_1 + a_2}(1 - e^{-(a_1+a_2)(t-s)}). \end{aligned}$$

Abgabe: Mittwoch, 25. Januar, 10 Uhr, in Zimmer 213, Geb. E2.4