

Zinsmarktmodelle

12. Übungsblatt

Aufgabe 1. (6+3+5=14 Punkte)

Wir betrachten das Zwei-Faktor Hull-White-Modell. Zeigen Sie:

a) Die Zufallsvariable

$$I(t, T) := \int_t^T (y_1(u) + y_2(u)) du$$

ist bedingt auf $\mathcal{F}_t$ normalverteilt, und es gilt

$$E[I(t, T) | \mathcal{F}_t] = M(t, T) := \frac{1}{a_1} (1 - e^{-a_1(T-t)}) y_1(t) + \frac{1}{a_2} (1 - e^{-a_2(T-t)}) y_2(t),$$

$$\text{Var}[I(t, T) | \mathcal{F}_t] = V(t, T)$$

$$\begin{aligned} &:= \frac{\eta_1^2}{a_1^2} \int_t^T (1 - e^{-a_1(T-u)})^2 du + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} \int_t^T (1 - e^{-a_2(T-u)})^2 du \\ &\quad + 2\rho \frac{\eta_1 \eta_2}{a_1 a_2} \int_t^T (1 - e^{-a_1(T-u)}) (1 - e^{-a_2(T-u)}) du \\ &= \frac{\eta_1^2}{a_1^2} \left(T - t + \frac{2}{a_1} e^{-a_1(T-t)} - \frac{1}{2a_1} e^{-2a_1(T-t)} - \frac{3}{2a_1} \right) \\ &\quad + \frac{\eta_2^2}{a_2^2} \left(T - t + \frac{2}{a_2} e^{-a_2(T-t)} - \frac{1}{2a_2} e^{-2a_2(T-t)} - \frac{3}{2a_2} \right) \\ &\quad + 2\rho \frac{\eta_1 \eta_2}{a_1 a_2} \left(T - t + \frac{e^{-a_1(T-t)} - 1}{a_1} + \frac{e^{-a_2(T-t)} - 1}{a_2} - \frac{e^{-(a_1+a_2)(T-t)} - 1}{a_1 + a_2} \right). \end{aligned}$$

b) Es ist

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T \varphi(u) du - M(t, T) + \frac{1}{2} V(t, T) \right\}.$$

c) Das Modell reproduziert die beobachtete Kurve $B_{\text{Markt}}(0, T)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} \varphi(T) &= - \frac{\partial \ln B_{\text{Markt}}(0, T)}{\partial T} + \frac{\eta_1^2}{2a_1^2} (1 - e^{-a_1 T})^2 + \frac{\eta_2^2}{2a_2^2} (1 - e^{-a_2 T})^2 \\ &\quad + \rho \frac{\eta_1 \eta_2}{a_1 a_2} (1 - e^{-a_1 T}) (1 - e^{-a_2 T}), \end{aligned}$$

bzw.

$$\exp \left\{ - \int_t^T \varphi(u) du \right\} = \frac{B_{Markt}(0, T)}{B_{Markt}(0, t)} \exp \left\{ - \frac{1}{2} (V(0, T) - V(0, t)) \right\}.$$

Es gilt dann

$$B(t, T) = \frac{B_{Markt}(0, T)}{B_{Markt}(0, t)} \exp \left\{ -M(t, T) + \frac{1}{2} (V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)) \right\}.$$

Abgabe: Mittwoch, 1. Februar, 10 Uhr, in Zimmer 213, Geb. E2.4