Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

10. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*3 Punkte*)
Sei K ein Körper und α ein algebraisches Element aus einer Erweiterung von K. Zeige $K(\alpha) = K(\alpha^2)$, falls der Grad des Minimalpolynoms von α über K ungerade ist.

Aufgabe 2: (*5 Punkte*)
Finde das Minimalpolynom
a) von $\sqrt{7}$ über $\mathbb{Q}$, b) von $(\sqrt{11}+3)/2$ über $\mathbb{Q}$, c) von $(i\sqrt{3}-1)/2 \in \mathbb{C}$ über $\mathbb{Q}$,
d) von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 3: (*2 Punkte*)
Konstruiere einen Körper mit 8 Elementen.

Aufgabe 4: (*2 Punkte*)
Sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung und der Körpergrad $[L:K]$ eine Primzahl. Zeige, daß es keine echten Zwischenkörper in $L|K$ gibt. Zeige, daß $L|K$ eine einfache Erweiterung ist.

Aufgabe 5: (*5 Punkte*)
Sei $\mathbb{A}$ die Menge aller komplexen Zahlen, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind.
a) Zeige, daß $\mathbb{A}$ ein Körper ist, der zudem algebraisch abgeschlossen ist.
b) Zeige, daß $\mathbb{A}|\mathbb{Q}$ zwar algebraisch, aber nicht endlich ist.

Aufgabe 6: (*5 Punkte*)
Berechne für die folgenden Körper K, L jeweils $[L:K]$ sowie eine K-Basis von L:
a) $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$, $K = \mathbb{Q}$ b) $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$, $K = \mathbb{Q}(i)$

Aufgabe 7: (*5 Punkte*)
Zeige $\mathbb{Q}(\sqrt{a}, \sqrt{b}) = \mathbb{Q}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ für alle $a, b \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 8: (*3 Punkte*)
Zeige, daß es endliche Erweiterungen von $\mathbb{Q}$ von beliebigem Grad gibt.

Abgabe am 18.1.1999 vor der Vorlesung

Comic der Woche: