Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

12. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*4 Punkte*)
Bestimme für jede der folgenden Körpererweiterungen $L|K$ die Gruppe Aut $(L|K)$ der K-Automorphismen von L:

a) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})|\mathbb{Q}$

b) $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$, α die reelle 5-te Wurzel von 3

c) $\mathbb{F}_3(\beta)|\mathbb{F}_3$, β Nullstelle von $X^2 - 2$

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

a) Zeige, daß $K|\mathbb{Q}$ eine Galois-Erweiterung ist.

b) Bestimme $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{Q})$.

c) Bestimme alle Untergruppen von G.

d) Bestimme zu jeder Untergruppe den zugehörigen Fixkörper.

Aufgabe 3: (*6 Punkte*)
Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ ein irreduzibles, separables Polynom vom Grad n und L der Zerfällungskörper von f. Seien $a_1, \ldots, a_n \in L$ die Nullstellen von f und G die Galoisgruppe von $L|K$.

a) Für jedes $\sigma \in G$ definiere $\varphi_\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ durch $\varphi_\sigma(j) = k$, falls $\sigma(a_j) = a_k$. Zeige, daß $G \to S_n; \sigma \mapsto \varphi_\sigma$ einen injektiven Gruppenhomomorphismus definiert, und daß man folglich G als Untergruppe von S_n auffassen kann, so daß gilt: $\sigma(a_j) = a_{\sigma(j)}$.

b) Sei $\Delta(f) := \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n}(a_i - a_j)$ und $D(f) := \Delta(f)^2$ (vgl. Blatt 9). Zeige $\sigma(\Delta(f)) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \Delta(f)$ für alle $\sigma \in G$.

c) Sei A_n die Untergruppe der geraden Permutationen in S_n. Zeige, daß G genau dann eine Untergruppe von A_n ist, wenn $D(f)$ ein Quadrat in K ist.

Aufgabe 4: (*4 Punkte*)
Zeige die Irreduzibilität folgender Polynome über $\mathbb{Q}$ und bestimme die Galois-Gruppen ihrer Zerfällungskörper.

a) $X^3 + X^2 - 6$

b) $X^3 + 3X + 1$

c) $2X^3 - 6X + 2$

Abgabe am 1.2.1999 vor der Vorlesung

Comic der Woche: