Universität des Saarlandes
Fachbereich 9, Mathematik
Prof. Dr. R. Berger

13. Übung zu Algebra I, WS 98/99

Aufgabe 1: (*3 Punkte*)
Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles separables Polynom. Sei L ein Zerfällungskörper von f und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ die Nullstellen von f. Zeige, daß die Galoisgruppe G von $L|K$ transitiv auf den Nullstellen von f operiert, d.h. für alle i, j existiert ein $\sigma \in G$ mit $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$.

Aufgabe 2: (*6 Punkte*)
Seien K, L_1, L_2 Unterkörper des Körpers M mit $K \subseteq L_1$, $K \subseteq L_2$. Zeige:

a) Sind $L_1|K$ und $L_2|K$ endliche Galoiserweiterungen mit Gruppen G_1, G_2, so ist auch $L_1L_2|K$ galoissch mit einer Galoisgruppe G, welche sich durch $G \hookrightarrow G_1 \times G_2; \sigma \mapsto (\sigma_{|L_1}, \sigma_{|L_2})$ in $G_1 \times G_2$ einbetten läßt.
b) Ist zusätzlich $L_1 \cap L_2 = K$ so ist diese Einbettung sogar ein Isomorphismus.

Aufgabe 3: (*5 Punkte*)
Sei $L|K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Gruppe G. Definiere die Norm $\mathrm{N}_K^L : L \to L; x \mapsto \prod\limits_{\sigma \in G} \sigma(x)$ und die Spur $\mathrm{Tr}_K^L : L \to L; x \mapsto \sum\limits_{\sigma \in G} \sigma(x)$. Zeige:

a) Die Norm ist multiplikativ, d.h. $\mathrm{N}_K^L(xy) = \mathrm{N}_K^L(x)\mathrm{N}_K^L(y)$ für alle $x, y \in L$.
b) Die Spur ist additiv, d.h. $\mathrm{Tr}_K^L(x+y) = \mathrm{Tr}_K^L(x) + \mathrm{Tr}_K^L(y)$ für alle $x, y \in L$.
c) $\mathrm{N}_K^L(L) \subseteq K$, $\mathrm{Tr}_K^L(L) \subseteq K$.
d) $\mathrm{N}_K^L(a) = a^{[L:K]}$ und $\mathrm{Tr}_K^L(a) = [L:K] \cdot a$ für alle $a \in K$.

Aufgabe 4: (*6 Punkte*)
Sei $K(\alpha)|K$ eine endliche Galoiserweiterung mit Gruppe G.

a) Zeige, daß das Minimalpolynom von α über K gleich $\prod\limits_{\sigma \in G} (X - \sigma(\alpha))$ ist.
b) Sei m_α die K-lineare Abbildung $m_\alpha : L \to L; x \mapsto \alpha x$. Zeige, daß $N_K^{K(\alpha)}(\alpha) = \det(m_\alpha)$ und $\mathrm{Tr}_K^{K(\alpha)}(\alpha) = \mathrm{spur}(m_\alpha)$ ist.

Abgabe am 8.2.1999 vor der Vorlesung

Comic der Woche: